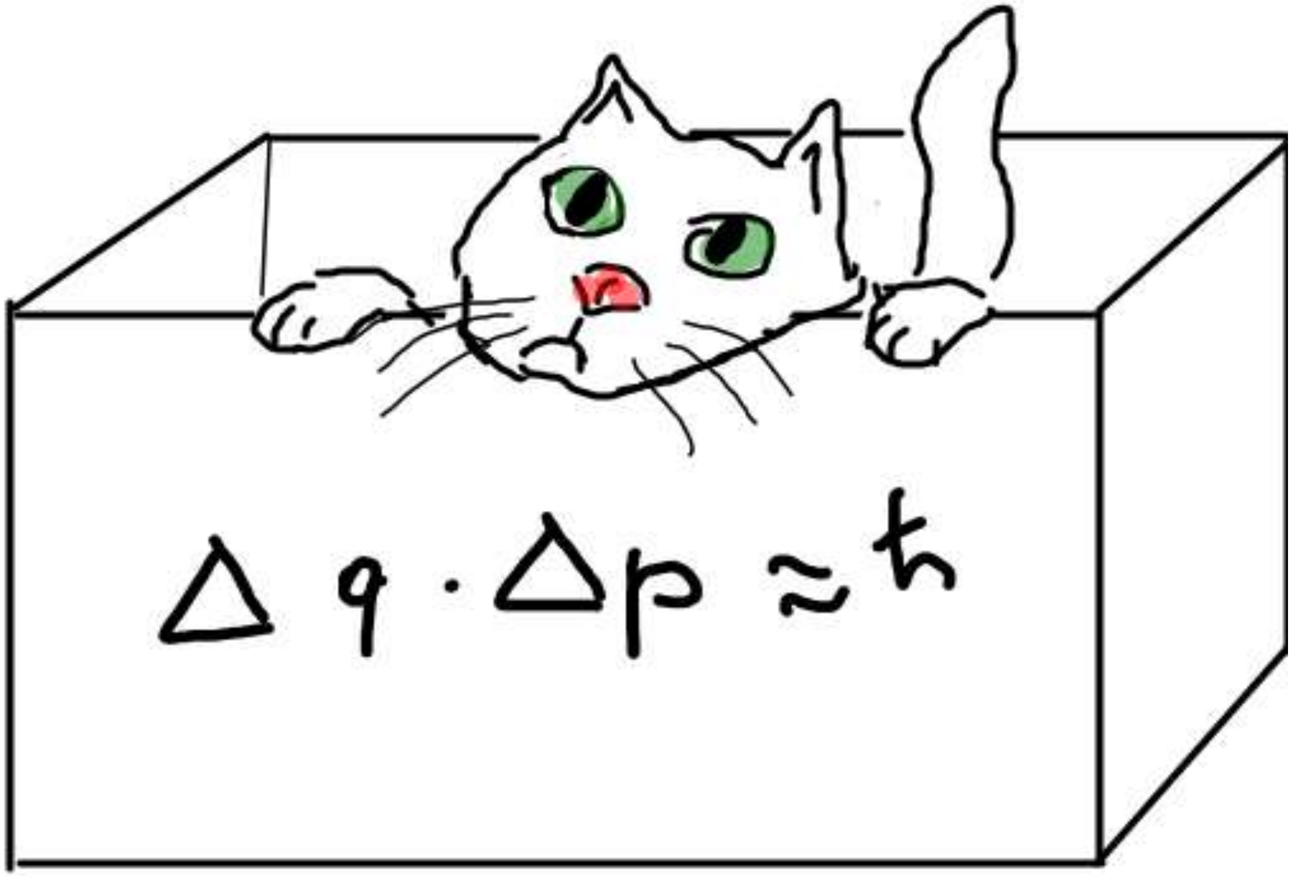
Meccanica quantistica



Lezione 1

Le origini: la Fisica della fine del XIX° secolo

MECCANICA: MECCANICA ANALITICA, PROBLEMA DEI 3 CORPI, POSSIBILITÀ TEORICA DI DETERMINARE LO STATO DI UN QUALSIASI SISTEMA MECCANICO (UNIVERSO COMPRESO) IN OGNI ISTANTE PASSATO O FUTURO, NOTE LE CONDIZIONI INIZIALI (POSIZIONE E VELOCITÀ)

TERMODINAMICA:

1° PRINCIPIO: CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$\Delta U = Q - L$

- ΔU = VARIAZIONE DI ENERGIA INTERNA
- Q = CALORE SCAMBIATO
- L = LAVORO FATTO SULL'AMBIENTE ESTERNO (+) O SUBITO (−)

2° PRINCIPIO = IMPOSSIBILE L'ESISTENZA DI UNA MACCHINA TERMICA IL CUI UNICO RISULTATO SIA:

(1) LA TRASFORMAZIONE DI TUTTO IL CALORE ASSORBITO IN LAVORO

(2) IL PASSAGGIO DI UNA QUANTITÀ DI CALORE Q DA UN CORPO PIÙ FREDDO A UNO PIÙ CALDO.

⇓

IRREVERSIBILITÀ DI UN SISTEMA TERMODINAMICO ⇒ AUMENTO DELL'ENTROPIA

LEGGI EMPIRICHE:

(a) CALORIMETRIA

$$\boxed{Q = c_s m \Delta t + \lambda m}$$

(b) DIFFUSIONE DEL CALORE

$$\boxed{\frac{d\dot{Q}}{dS} = -K \frac{\partial T}{\partial x}}$$

(c) LEGGI DEI GAS:

(R. BOYLE) $p_0 V_0 = pV$

(CHARLES-GAYLUSSAC) $\begin{cases} p = p_0 (1 + \alpha t) \\ V = V_0 (1 + \alpha t) \end{cases}$ $\alpha = \frac{1}{273}$

$\Downarrow$

EQUAZIONE DI STATO DEI GAS "PERFETTI"

$$pV = nRT$$

$\begin{cases} p = \text{PRESSIONE} \\ V = \text{VOLUME} \\ T = \text{TEMPERATURA} \end{cases}$

n = NUMERO DI MOLI

$R = 8{,}31 \dfrac{N \cdot m}{mole \cdot {}^\circ K}$

ELETTROMAGNETISMO:

EQUAZIONI DI MAXWELL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\underbrace{\vec{J}}_{\text{CORRENTE DI CONDUZIONE}} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{CORRENTE DI SPOSTAMENTO}} \right)$$

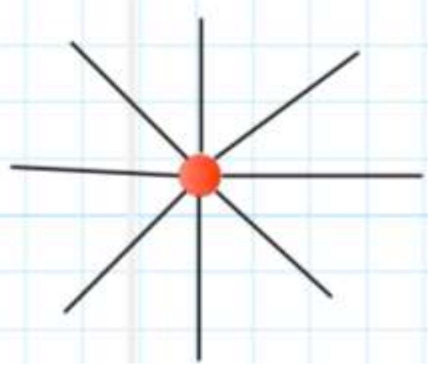
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE

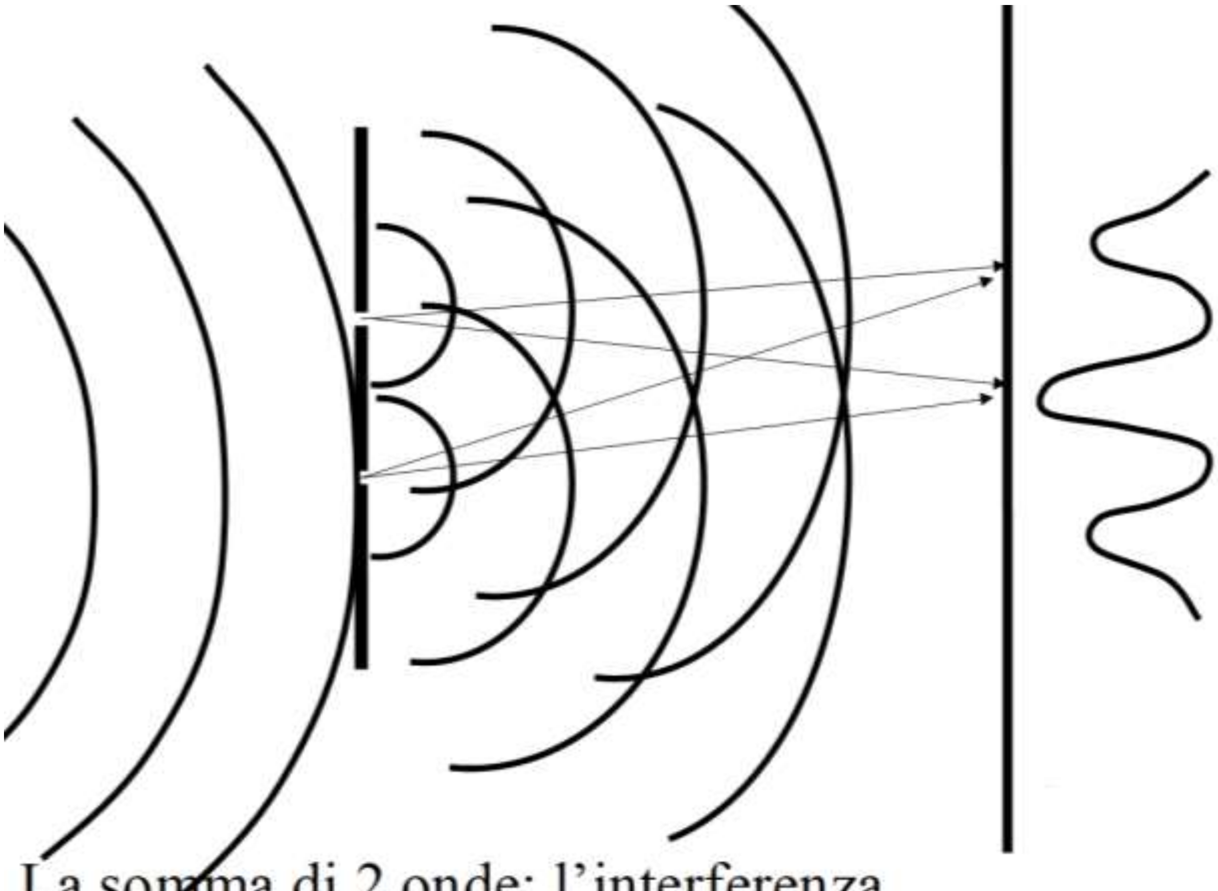
(INTERPRETAZIONE ONDULATORIA DELLA LUCE, ... E NON SOLO)

IN SOSTANZA:

LE ONDE ELETTROMAGNETICHE SONO ONDE DI CAMPO ELETTRICO E MAGNETICO PRODOTTE DA OSCILLAZIONE DI CARICHE O CORRENTI ELETTRICHE OSCILLANTI

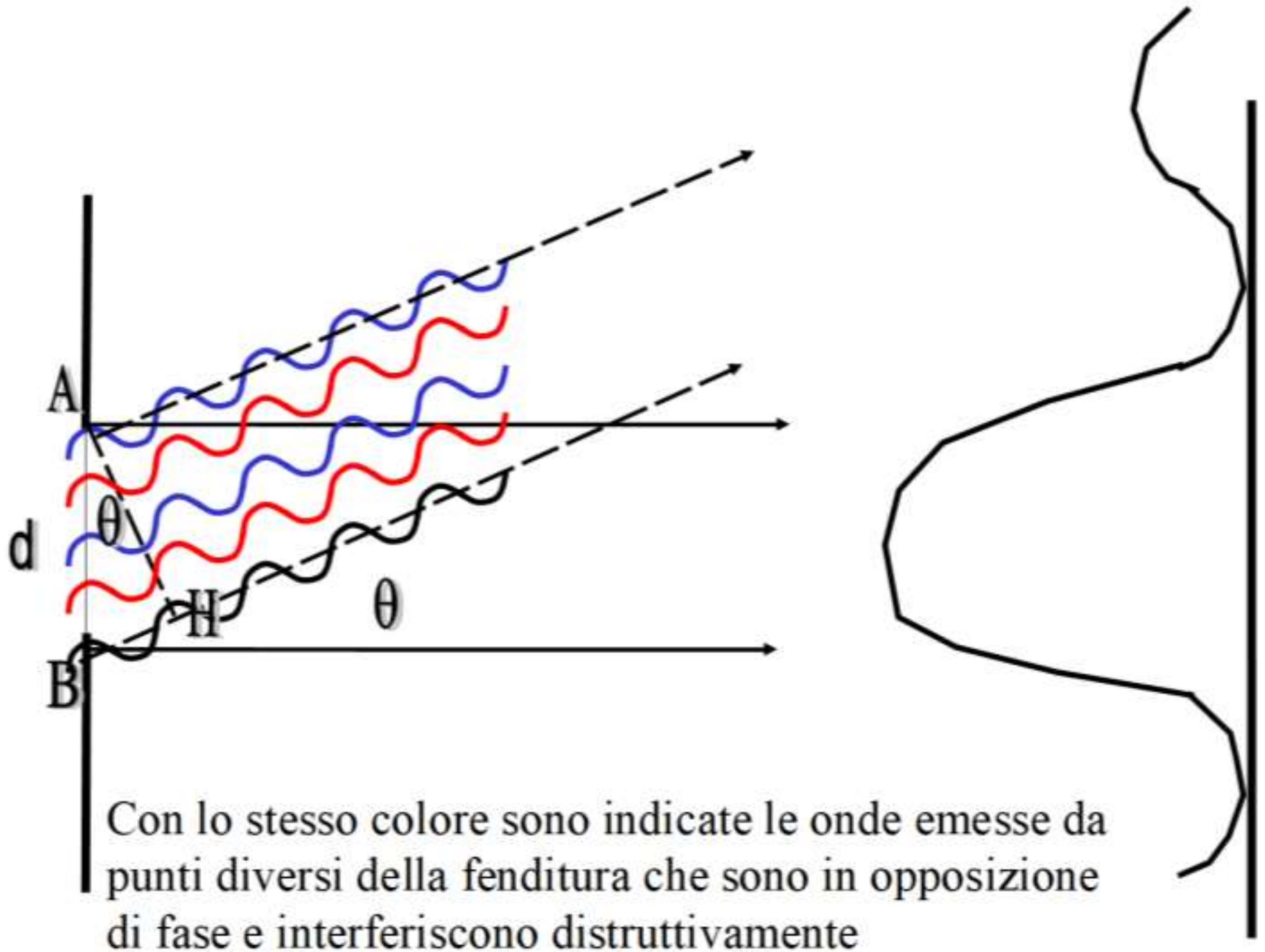


Teoria ondulatoria della luce: interferenza



La somma di 2 onde: l'interferenza
sullo schermo si alternano punti in cui le onde si sommano in fase (interferenza costruttiva), e punti in cui le onde si sommano in opposizione di fase (interferenza distruttiva).

Diffrazione da una fenditura



Con lo stesso colore sono indicate le onde emesse da punti diversi della fenditura che sono in opposizione di fase e interferiscono distruttivamente

DUNQUE LA RADIAZIONE È PRODOTTA DALLA MATERIA...

MA LA MATERIA COME È FATTA?

CHI LO SA?

FORSE I CHIMICI...

1) LAVOISIER PESA REAGENTI E PRODOTTO: LA MASSA SI CONSERVA

2) TEORIA DELLE PROPORZIONI MULTIPLE DI DALTON; GLI ELEMENTI SI COMBINANO IN RAPPORTI QUANTITATIVI SEMPLICI.

3) IPOTESI DI PROUST: LE QUANTITÀ ELEMENTARI (ATOMI) DI OGNI ELEMENTO SONO MULTIPLE DI QUELLA DEL PIÙ SEMPLICE.

AMEDEO AVOGADRO E IL NUMERO FISSO DI MOLECOLE IN UN VOLUME UNITARIO (VOLUME DI UNA MOLE)

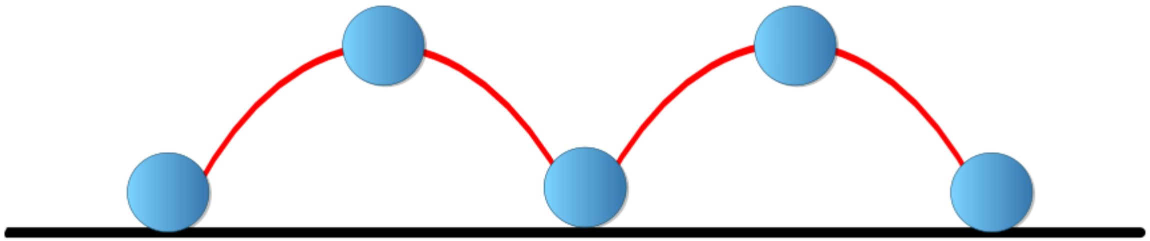
$$H_2 + Cl_2 \longrightarrow 2\,HCl$$

PERCHE 1 VOLUME DI CLORO + 1 VOLUME DI OSSIGENO DANNO 2 VOLUMI DI ACIDO CLORIDRICO?

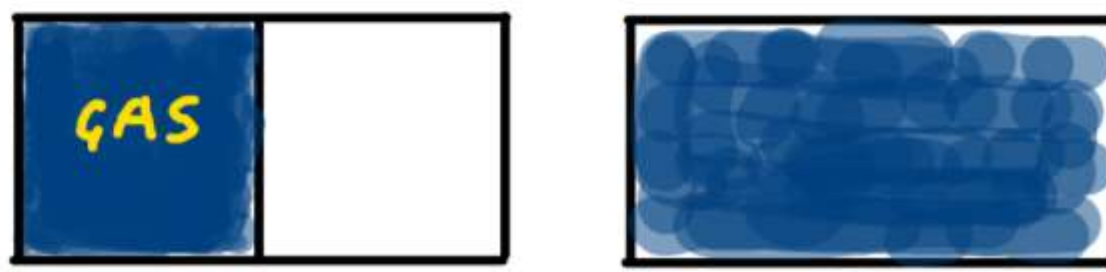
PER TROVARE IL NUMERO DI AVOGADRO BISOGNERÀ ASPETTARE CHE I FISICI COMINCINO A PARLARE DI ATOMI.

Un problema: le leggi della Meccanica sono simmetriche rispetto all'inversione temporale, mentre quelle della Termodinamica non lo sono.

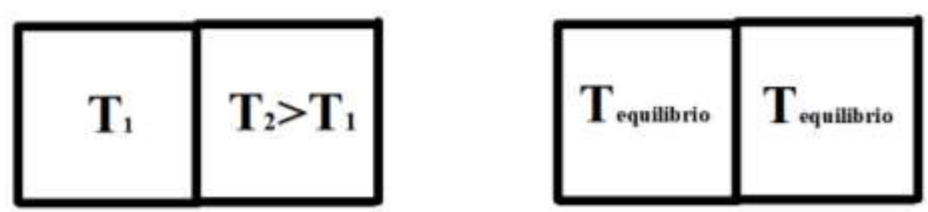
Meccanica reversibile, Termodinamica irreversibile: come si fa allora a spiegare i comportamenti dei sistemi macroscopici con quelli meccanici di corpuscoli elementari?



D.: "Qual è il verso del rimbalzo?"
R.: "Boh?!"



D.: "Qual è l'ordine temporale delle due situazioni?"
R.: "Boia! Questa la so!"



ESEMPI:

(1) TRASPORTO DEL CALORE
(DA T MAGGIORE A T MINORE
E NON VICEVERSA)

(2) ESPANSIONE DI UN GAS
NEL VUOTO E DIFFUSIONE

LA SOLUZIONE DI LUDWIG
BOLTZMANN.

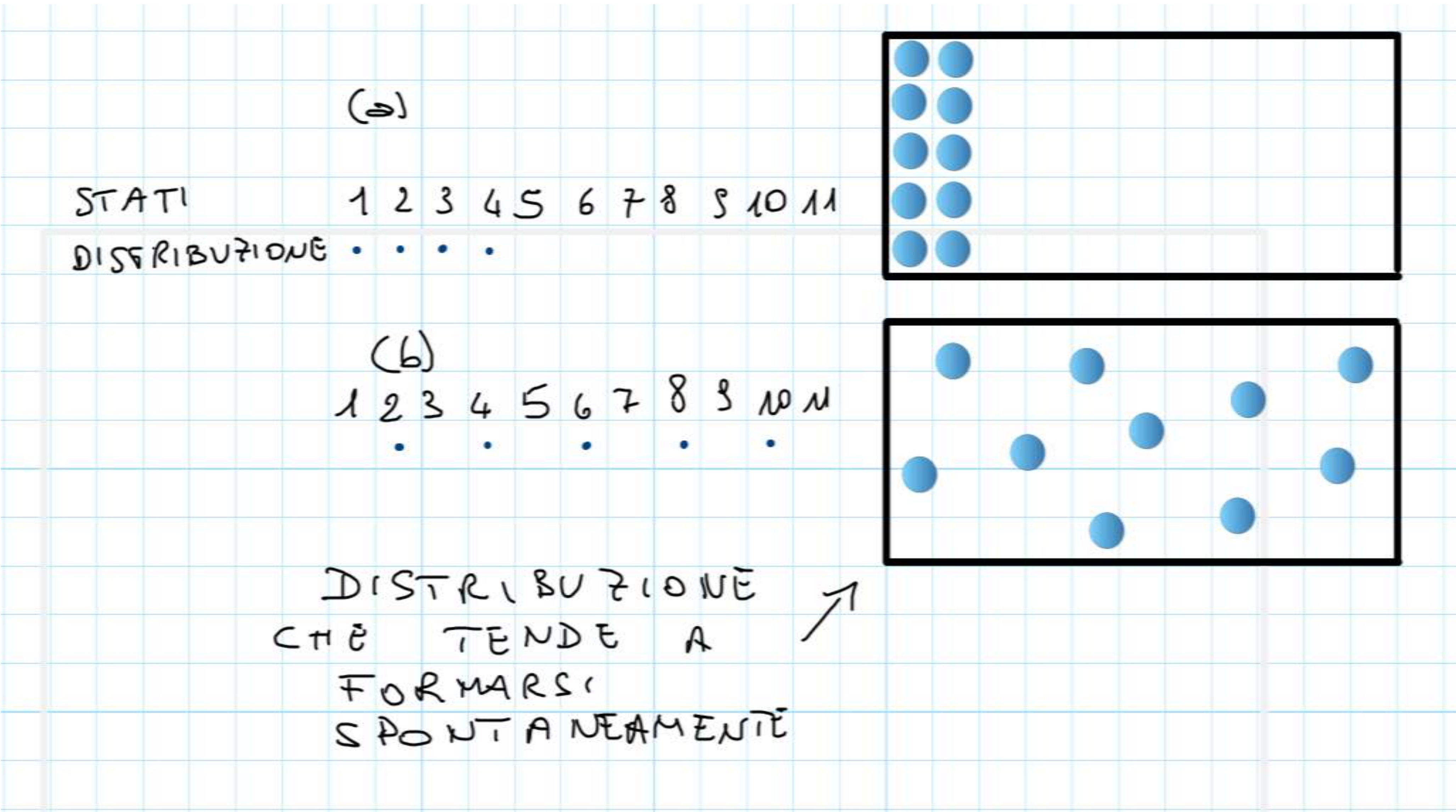
Studiare statisticamente un sistema macroscopico significa trovare la corrispondenza tra il suo stato e i microstati possibili dei suoi elementi.

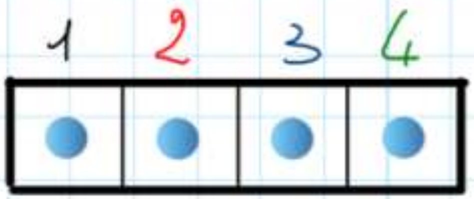
Ne segue che il macrostato che corrisponde al maggior numero di microstati è il più probabile.

Un esempio?

Macrostato: “Casino”

La statistica di L. Boltzmann





NUMERO DI MICROSTATI CORRISPONDENTI A QUESTA SITUAZIONE (CIOÈ IN QUANTI MODI SI PUÒ OTTENERE)

1 2 3 4			
1 2 4 3			
1 3 2 4			
1 3 4 2			
1 4 3 2			
1 4 2 3			
2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3	
2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2	
2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3	
2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1	
2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1	
2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2	

PERMUTAZIONI = SCAMBI DI POSTO

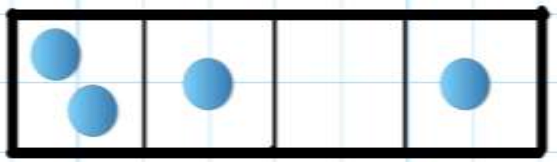
NUMERO TOT. DI MICROSTATI

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$$

FATTORIALE

QUESTO PUNTO È CHIARO CHE NELL'ALTRA SITUAZIONE

1 2 3 4



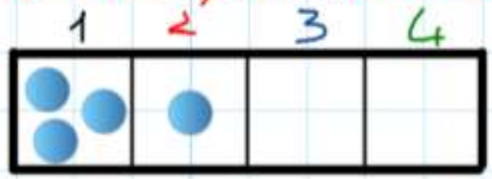
1 1 2 4

ANDIAMO A FARE I CONTI

1	1	2	1	4	7	2	1	1	4	3	1	1	2	4	10	4	1	2	1
2	1	2	4	1	8	2	1	4	1	4	1	1	4	2	11	4	1	1	2
3	1	1	2	4	7	2	1	1	4	1	1	2	1	4	12	4	2	1	1
4	1	1	4	2	8	2	1	4	1	2	1	2	4	1	12	4	2	1	1
5	1	4	1	2	9	2	4	1	1	6	1	4	2	1	10	4	1	2	1
6	1	4	2	1	9	2	4	1	1	5	1	4	1	2	11	4	1	1	2

numero totale microstati $= \dfrac{24}{2} = \boxed{12}$

CONTINUIAMO A CONCENTRARE LE PALLINE



1 1 2 1 1	4 2 1 1 1	2 1 1 2 1	2 1 1 2 1
1 1 2 1 1	4 2 1 1 1	3 1 1 1 2	3 1 1 1 2
2 1 1 2 1	4 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 2 1 1
3 1 1 1 2	4 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 2 1 1
3 1 1 1 2	4 2 1 1 1	2 1 1 2 1	2 1 1 2 1
2 1 1 2 1	4 2 1 1 1	3 1 1 1 2	3 1 1 1 2

$$N_{tot} = 4 = \frac{24}{6} = \frac{4!}{3! \cdot 1! \cdot 0!}$$

$$(0! = 1! = 1)$$

OGNI SISTEMA FISICO TENDE SPONTANEAMENTE ALLA CONFIGURAZIONE MECCANICA PIÙ PROBABILE (L. BOLTZMANN).

CARATTERISTICHE DI UN GAS CHE SODDISFA LE IPOTESI DI BOLTZMANN:

(1) PARTICELLE PUNTIFORMI

(2) INTERAZIONI TRASCURABILI

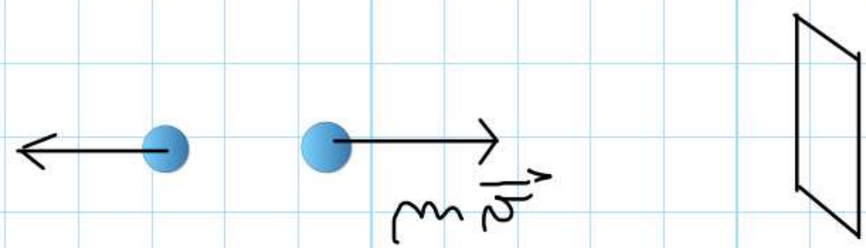
(3) OMOGENEITÀ

(4) ISOTROPIA DEI MOTI

↓

Teoria cinetica dei gas

TEORIA CINETICA DEI GAS



$$\cancel{2}\, m v \cdot \frac{n}{\cancel{2}} v S = F \leftarrow \left(\text{QUANTITÀ DI MOTO CEDUTA ALLA SUPERFICIE S IN 1s}\right)$$

$$n \; m v^2 = P$$

$$\overbrace{n \; m v^2 V} = PV = RT \quad \left(\text{PER } 1 \text{ mole}\right)$$

$$N_A \, m v^2 = RT$$

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{R}{N_A} T$$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{1}{2} K T}$$

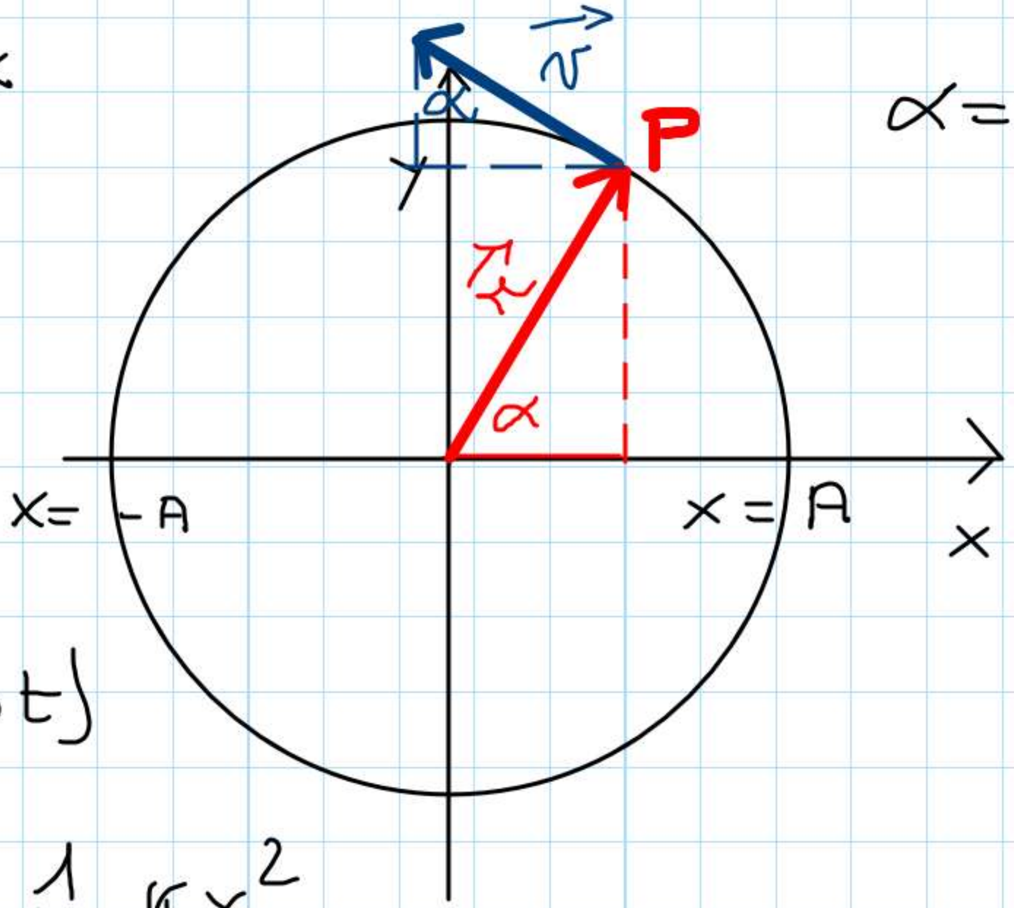
ENERGIA MEDIA DI UNA PARTICELLA LIBERA DI BOLTZMANN IN 1 DIMENSIONE

OSCILLATORE ARMONICO

$ma = -kx$

$-m\omega^2 x = -kx$

$k = m\omega^2$



$\alpha = \omega t$

$x = A\cos(\omega t)$

$v = -\omega A \,\mathrm{sen}(\omega t)$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + \frac{1}{2} m \omega^2 \cos^2 \omega t$$

ENERGIA MEDIA:

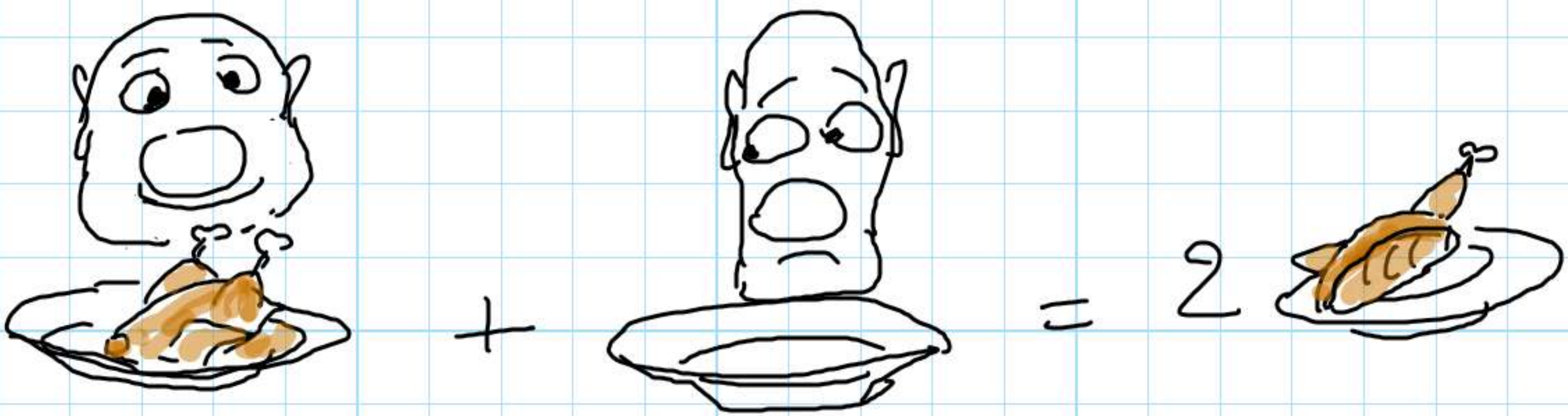
$$\langle E \rangle = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} k x^2 \rangle =$$

$$= \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle$$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{1}{2} k T \cdot 2 = k T}$$

ENERGIA MEDIA DI UN OSCILLATORE DI BOLTZMANN ....

MEDIA STATISTICA
E
DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA



DATI : 7 8 7 7 6 5 8 8 7 6 2 10

MEDIA:

$$\langle x \rangle = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 10}{1 + 1 + 2 + 4 + 3 + 1}$$

$$\langle x \rangle = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k +}{m_1 + m_2 + \dots m_k + \dots}$$

ENERGIA MEDIA DELLE PARTICELLE DI UN GAS

$$\langle E \rangle = \frac{n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots n_k E_k + \dots}{N_{tot}}$$

CIOÈ

$$\langle E \rangle = f_1 E_1 + f_2 E_2 + \dots f_k E_k$$

$$f_i = \frac{n_i}{N_{tot}}$$ FREQUENZA DI PARTICELLE DI ENERGIA E_i

cioè

FRAZIONE SUL TOTALE

PROBABILITÀ = FREQUENZA

$$\langle E \rangle = \frac{p(E_1)\cdot E_1 + p(E_2)\cdot E_2 + \ldots p(E_k)\cdot E_k + \ldots}{1}$$

LA SOMMA DI TUTTE LE PROBABILITÀ DI TUTTI GLI EVENTI POSSIBILI $= \sum_i f_i = \sum_i p_i = \frac{N_{TOT}}{N_{TOT}} = 1$

(CERTEZZA)

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i p(E_i)\cdot E_i}{\sum_i p(E_i)}$$

POICHÈ L'ENERGIA È UNA GRANDEZZA CHE VARIA CON CONTINUITÀ, POSSIAMO INDICARE CON $p(E)\,dE$ LA PROBABILITÀ CHE UNA PARTICELLA ABBIA ENERGIA COMPRESA TRA E E $E+dE$, PER CUI

$$\int_0^{+\infty} p(E)\,dE = 1 \qquad E$$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} E\,p(E)\,dE}{\int_0^{+\infty} p(E)\,dE}}$$

ORA CONSIDERIAMO LA LEGGE

$$p(E) = \frac{1}{KT} e^{-\frac{E}{KT}}$$ E CALCOLIAMO:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{KT} E \, e^{-\frac{E}{KT}} dE}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{KT} E^{-\frac{E}{KT}} dE} =$$

SOSTITUZIONE

$$\frac{E}{KT} = x$$

$$= \frac{KT \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x} dx} = \frac{KT \left\{ \overbrace{\left[-x e^{-x} \right]_0^{+\infty}}^{0} + \overbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} dx}^{1} \right\}}{\underbrace{\left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty}}_{=1}} =$$

$$\boxed{\langle E \rangle = KT}$$ CHE È

L'ENERGIA MEDIA DI UN OSCILLATORE ARMONICO.

ORA CONSIDERIAMO LA LEGGE

$p(E) = \frac{1}{KT} e^{-\frac{E}{KT}}$ E CALCOLIAMO:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{KT} E\, e^{-\frac{E}{KT}} dE}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{KT} e^{-\frac{E}{KT}} dE} =$$

SOSTITUZIONE

$\frac{E}{KT} = x$

$$= \frac{KT \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x} dx} = \frac{KT \left\{ \underbrace{\left[-x e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} dx}_{=1} \right\}}{\underbrace{\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=1}} =$$

$\boxed{\langle E \rangle = KT}$ CHE È

L'ENERGIA MEDIA DI UN OSCILLATORE ARMONICO.

CIÒ SIGNIFICA CHE

IN UN GAS DI OSCILLATORI DI TEMPERATURA T, LA LORO DISTRIBUZIONE IN ENERGIA SEGUE LA LEGGE

$$K \cdot e^{-\frac{E}{KT}}$$

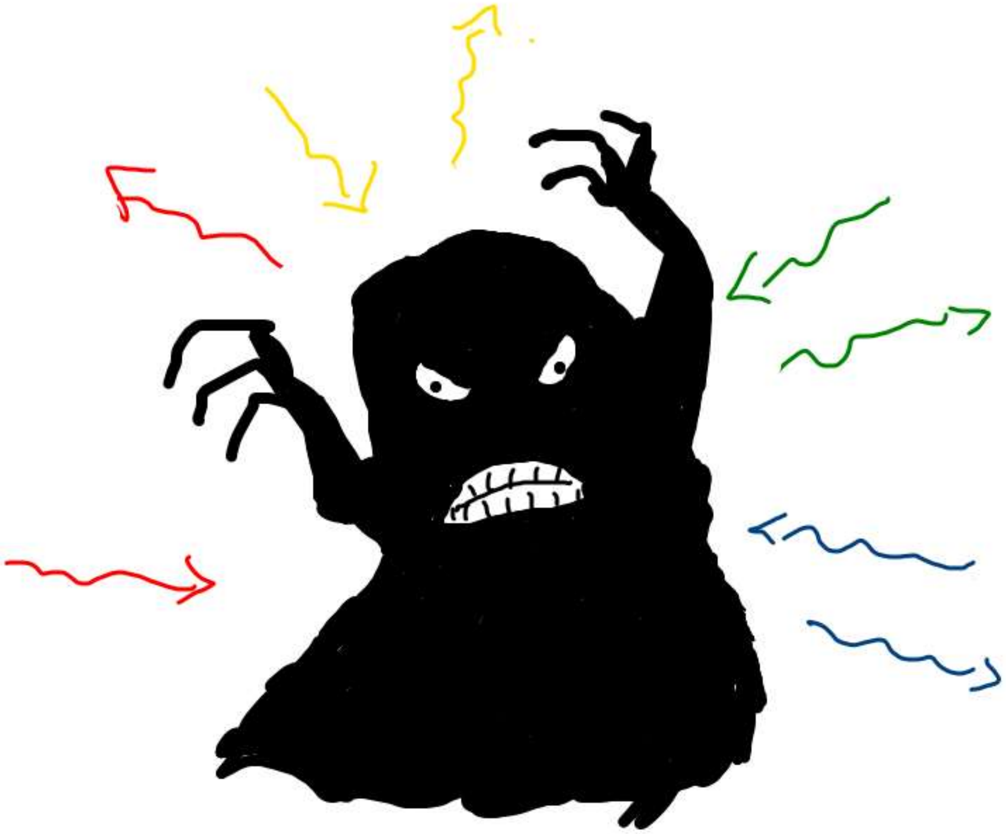
$e^{-\frac{x}{2}}$ e^{-x}

$e^{-\frac{x}{5}}$

$e^{-\frac{x}{10}}$

$e^{-\frac{x}{100}}$

Il mistero

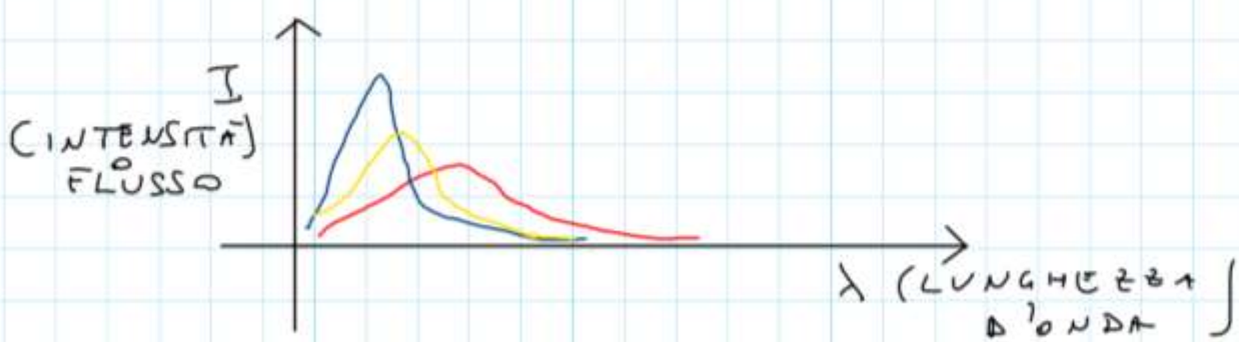


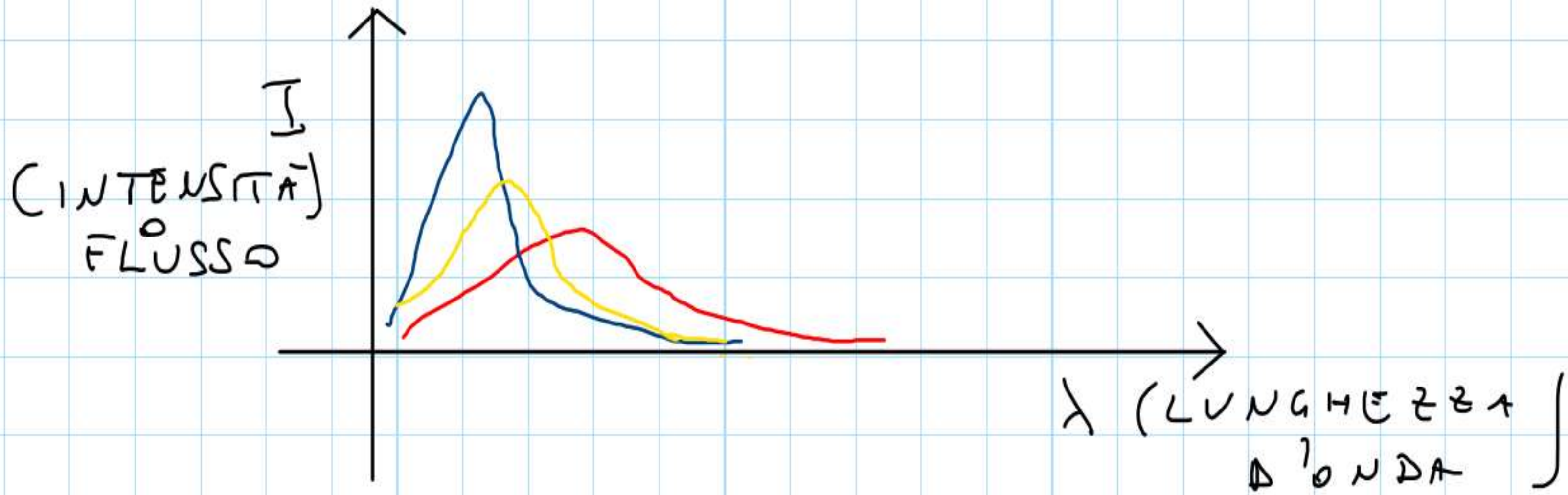
del “corpo nero”!

La questione della radiazione "termica"

KIRCHHOFF: L'EMISSIVITÀ TOTALE DI UN CORPO PORTATO A UNA DATA TEMPERATURA 'T' DIPENDE SOLO DA QUEST'ULTIMA.

WIEN: LO SPETTRO DELLA RADIAZIONE PRODOTTA DA UN CORPO PORTATO A UNA DATA TEMPERATURA T HA UN PROFILO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA ν RAPPRESENTABILE NEL SEGUENTE GRAFICO:





CON UNA LUNGHEZZA D'ONDA AL MASSIMO λ_{MAX} LEGATA ALLA TEMPERATURA DI INCANDESCENZA T DALLA RELAZIONE

$$\boxed{\lambda_{MAX} \cdot T = \text{COSTANTE}.}$$

(LEGGE DI WIEN)

MAGGIORE T → LUCE SPOSTATA IN λ VERSO L'ULTRAVIOLETTO.

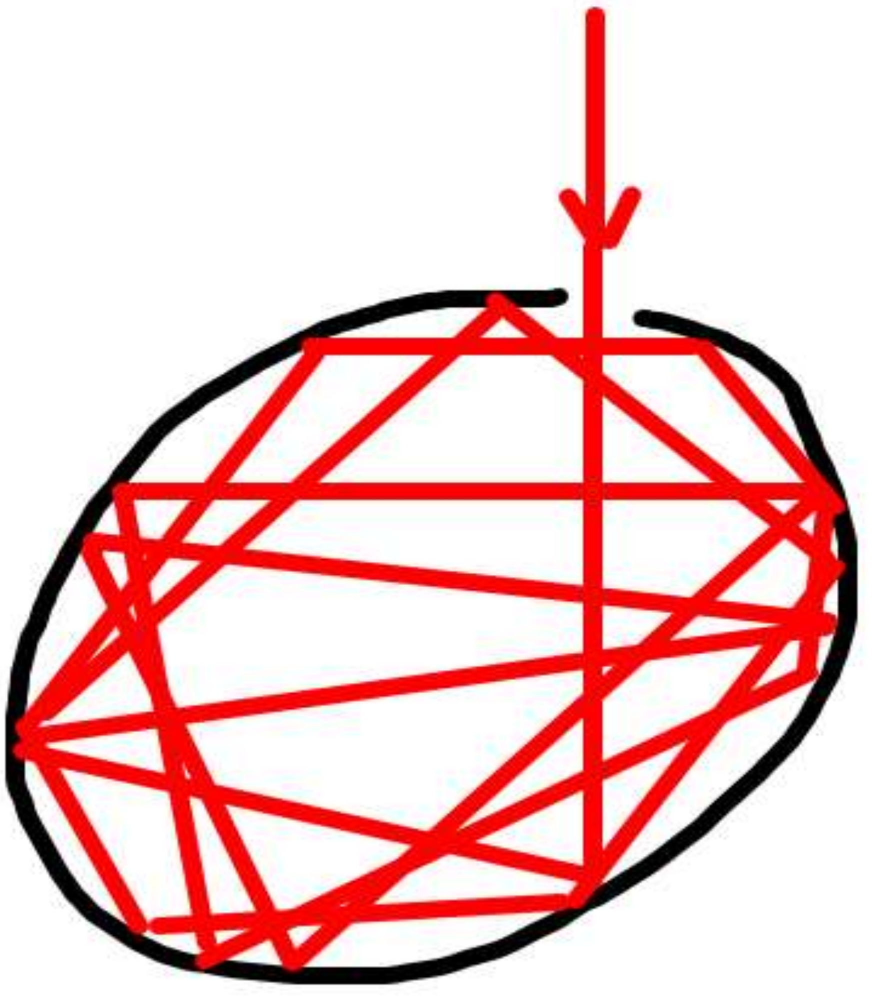
UN MODELLO FISICO DI RADIAZIONE "TERMICA" (IL "CORPO NERO")

PERCHÉ "NERO":

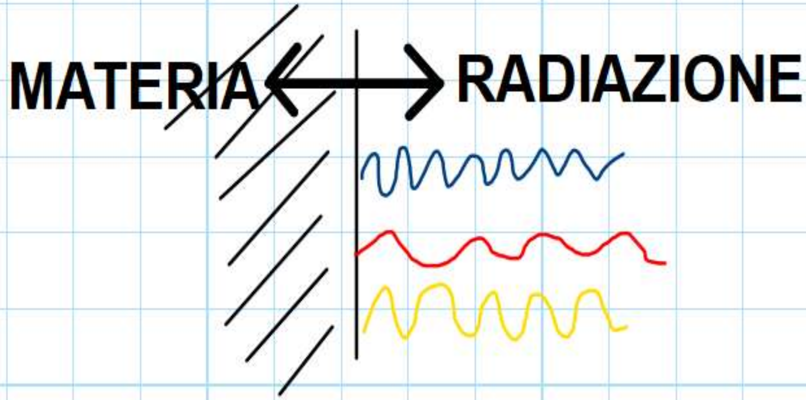
(1) È IL MODELLO DI CORPO CHE ASSORBE TUTTA LA RADIAZIONE CHE RICEVE

(2) UN CORPO NERO A TEMPERATURA T (COSTANTE) CEDE ENERGIA ALLO STESSO RITMO CUI LA RICEVE $\Rightarrow$ EQUILIBRIO TERMODINAMICO TRA MATERIA E RADIAZIONE.

Esperimenti su corpo nero: cavità annerita all'interno con un foro stretto: dopo alcune riflessioni la radiazione che entra attraverso il foro viene assorbita completamente. Un sistema simile soddisfa convenientemente le condizioni di temperatura costante e assorbimento completo.



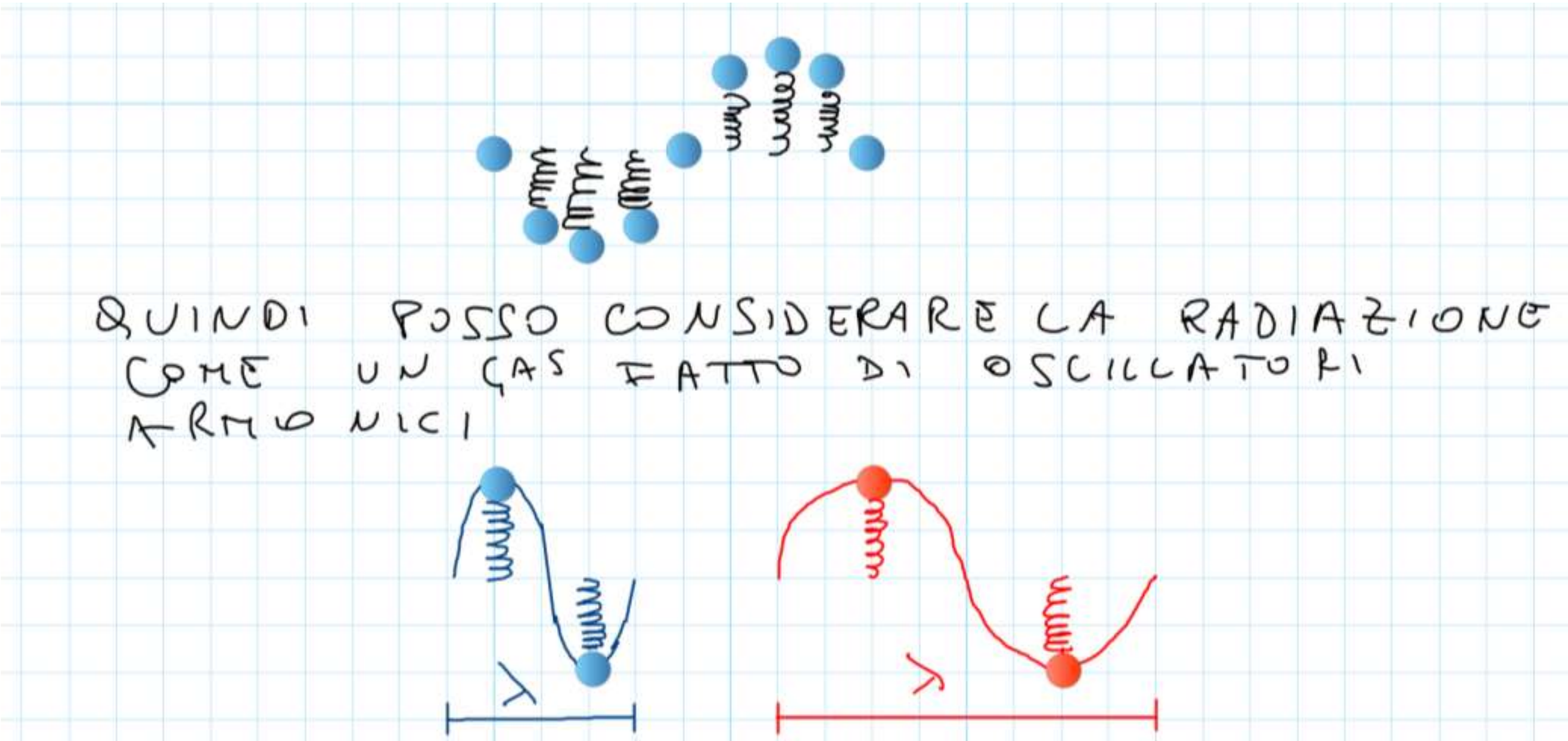
COME SI PUÒ COSTRUIRE UN MODELLO MECCANICO STATISTICO DI CORPO NERO?



LA RADIAZIONE È UN'OSCILLAZIONE CHE SI PROPAGA NELLO SPAZIO; MA COME FA A PROPAGARSI?

CI RIESCE PERCHÉ LO SPAZIO È RIEMPITO DI OSCILLATORI ARMONICI

(Termodinamica della radiazione)



Ma quanti oscillatori ci sono nell'unità di spazio?
In altre parole, qual è la loro densità?

E soprattutto come cavolo si fa a contarli se questi accidenti di oscillatori non si vedono?

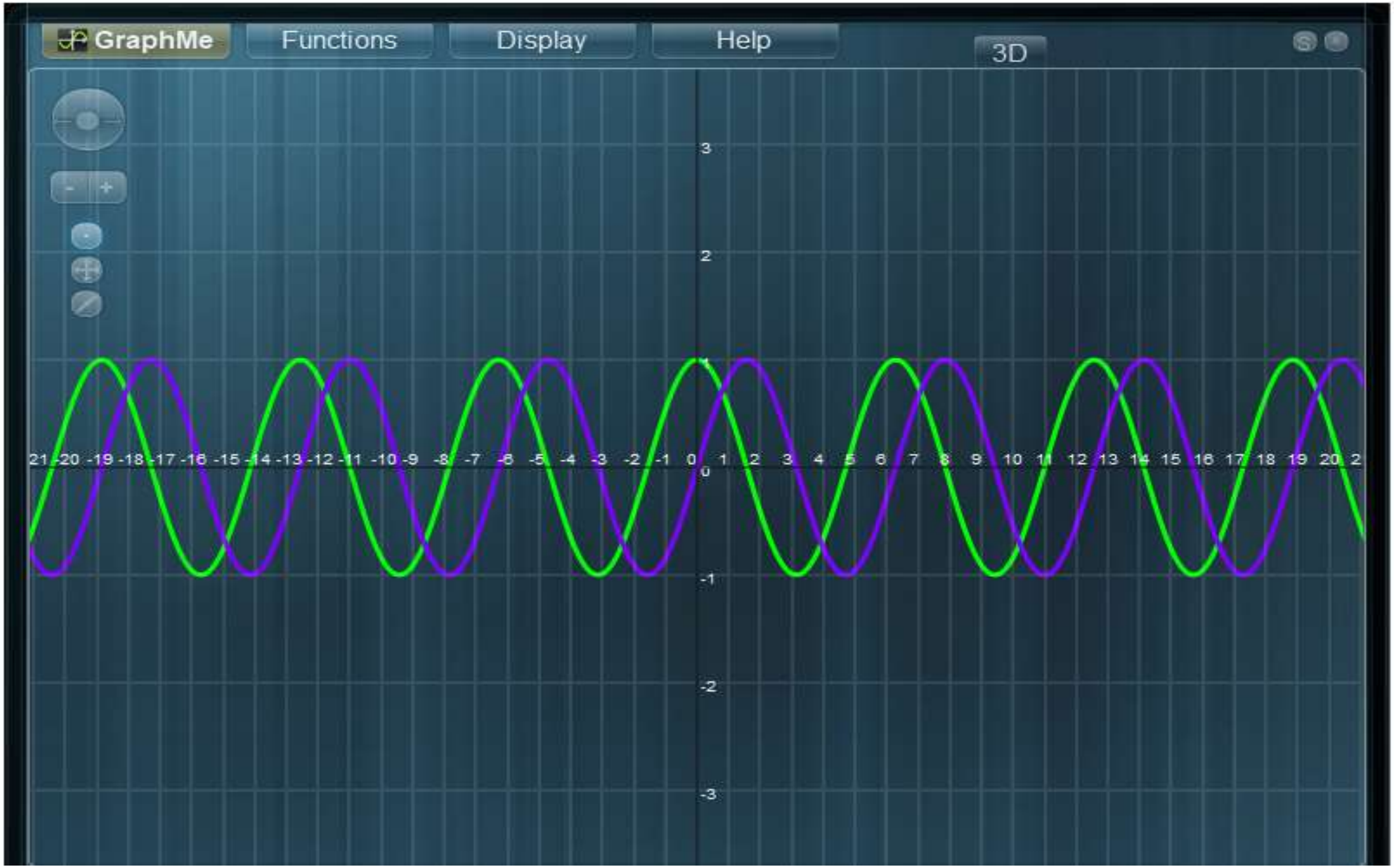
Promemoria

Funzione d'onda sinusoidale

$$\psi = A e^{i\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right]} \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\psi = A \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) + \alpha\right]$$

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \lambda \cdot \nu = c$$



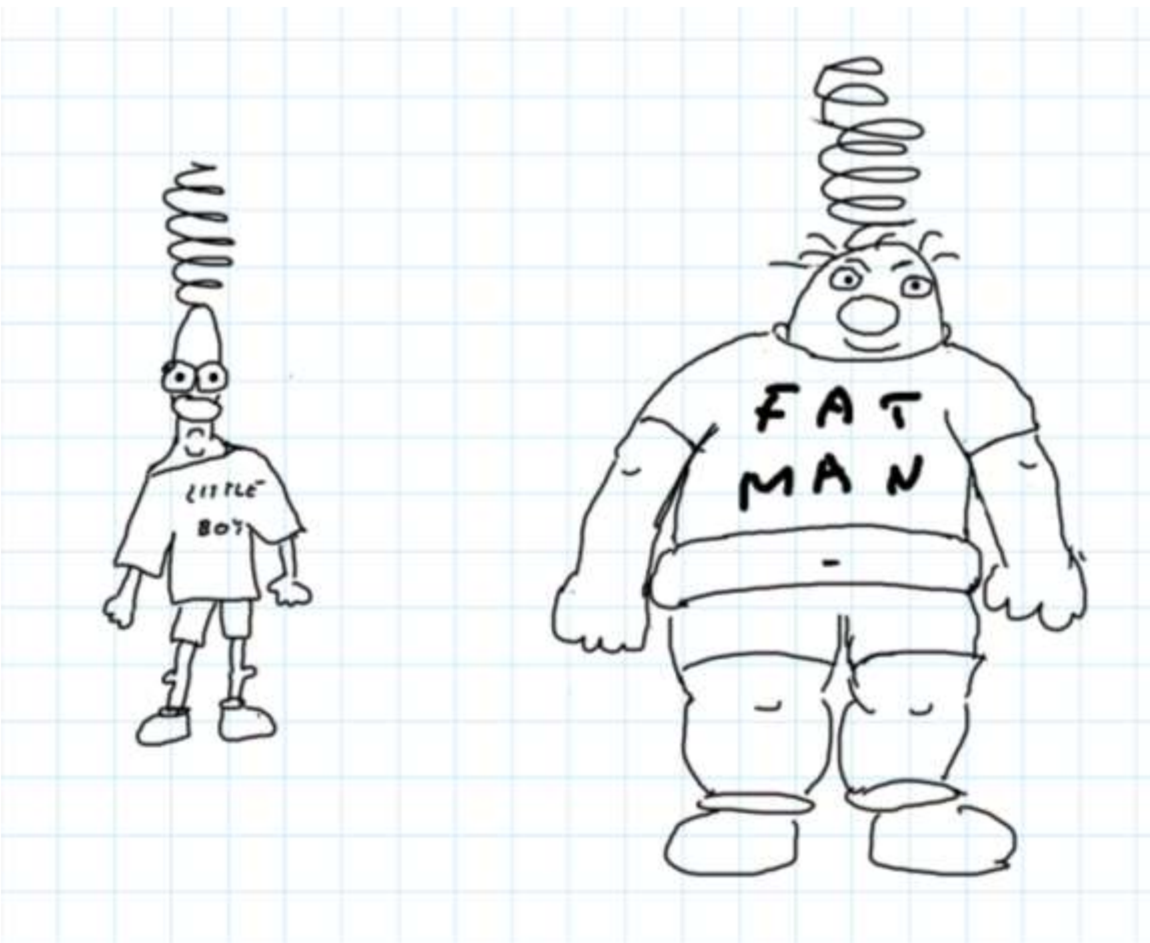
sin(x)

cos(x)

Un'onda sinussoidale non ha limite nello spazio e nel tempo.

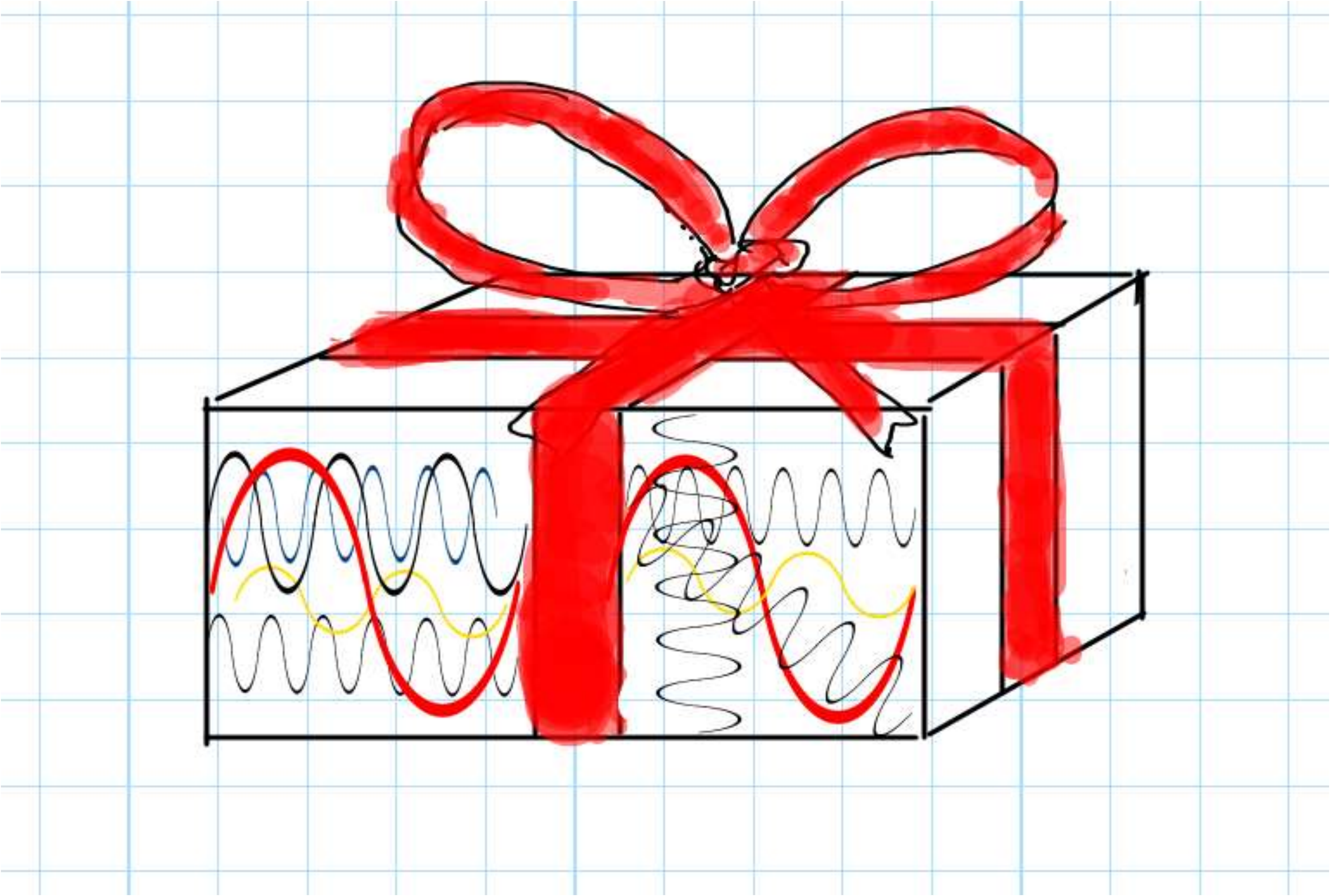
Lo “Spazio ondulatorio”

Per sapere quanti oscillatori ci sono nell'unità di spazio dovrei sapere prima di tutto quanto è largo un oscillatore. Il fatto è che non c'è mica una misura standard!



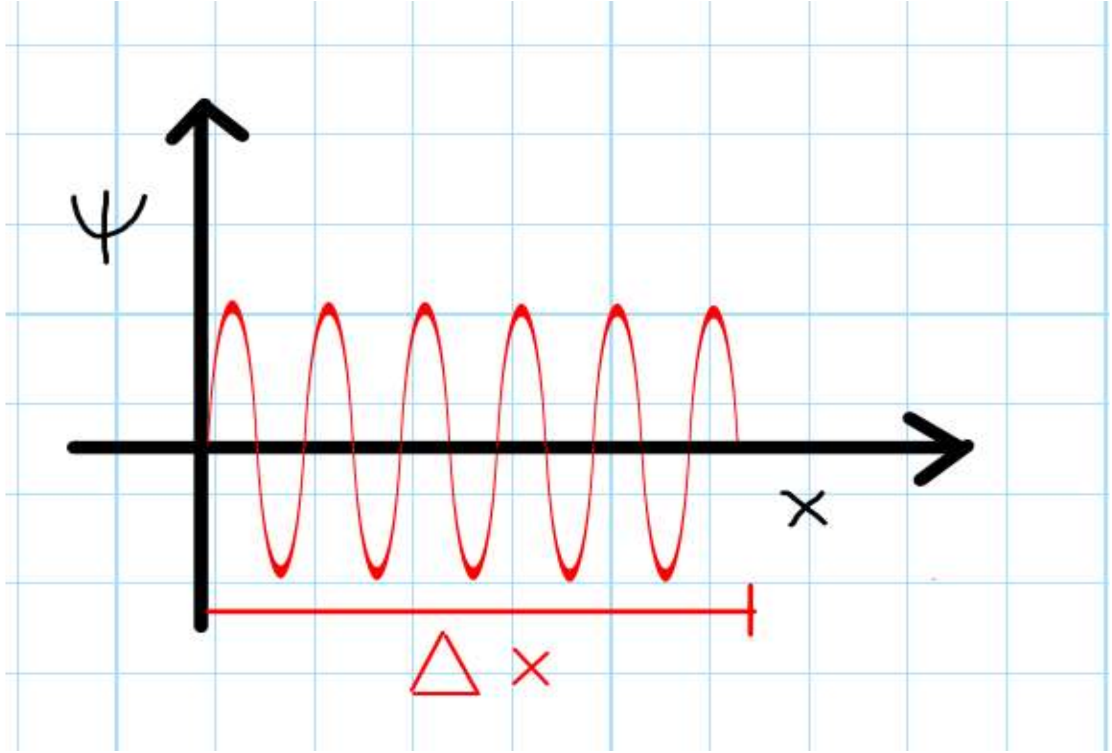
Ci possono essere oscillazioni di qualsiasi dimensione. Tuttavia un'onda è infinita, quindi se un'oscillazione ha misure finite non è proprio un'onda, ma un “impulso” che in realtà è formato da...

… un pacchetto d'onde!

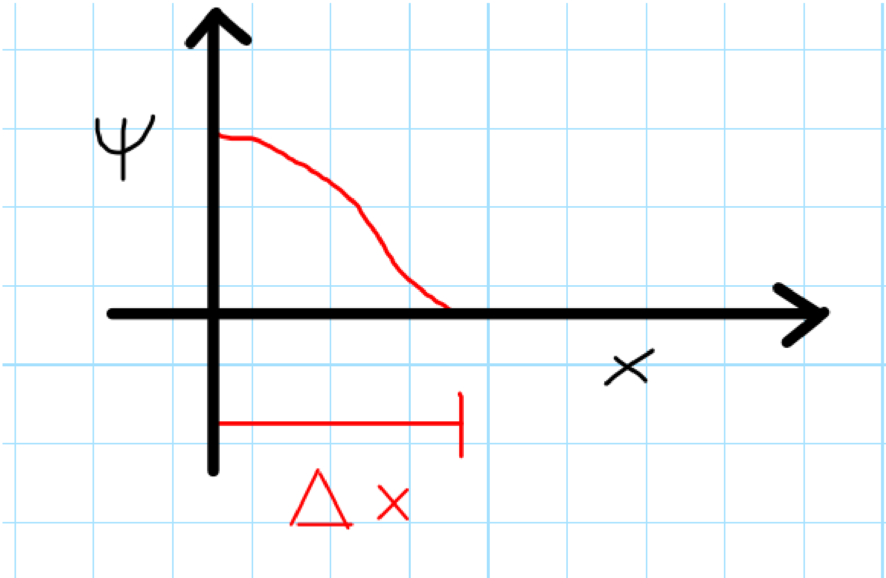


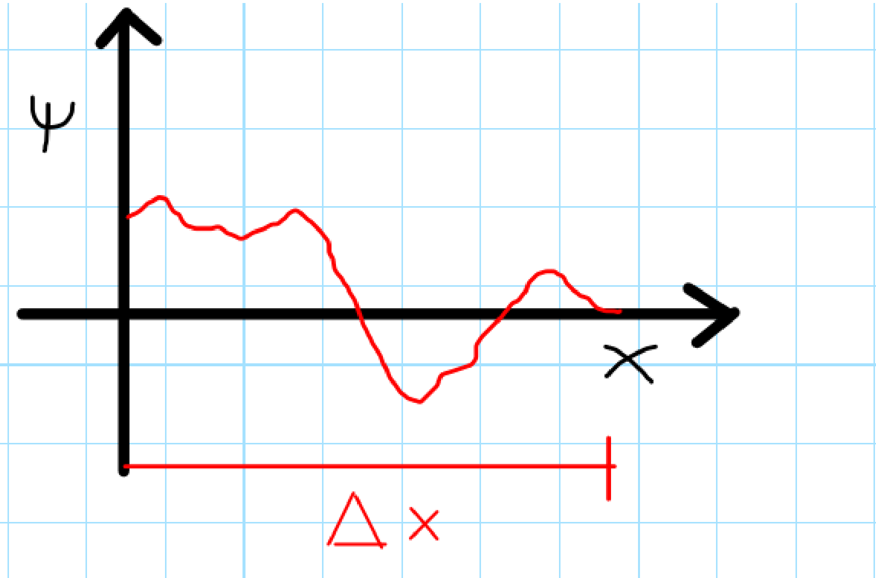
Proviamo a spiegare cosa vuol dire tutto ciò ...

Intanto una perturbazione di tipo ondulatorio non deve essere per forza una oscillazione armonica



ma può avere un qualsiasi profilo della funzione Ψ(x) che la descrive.



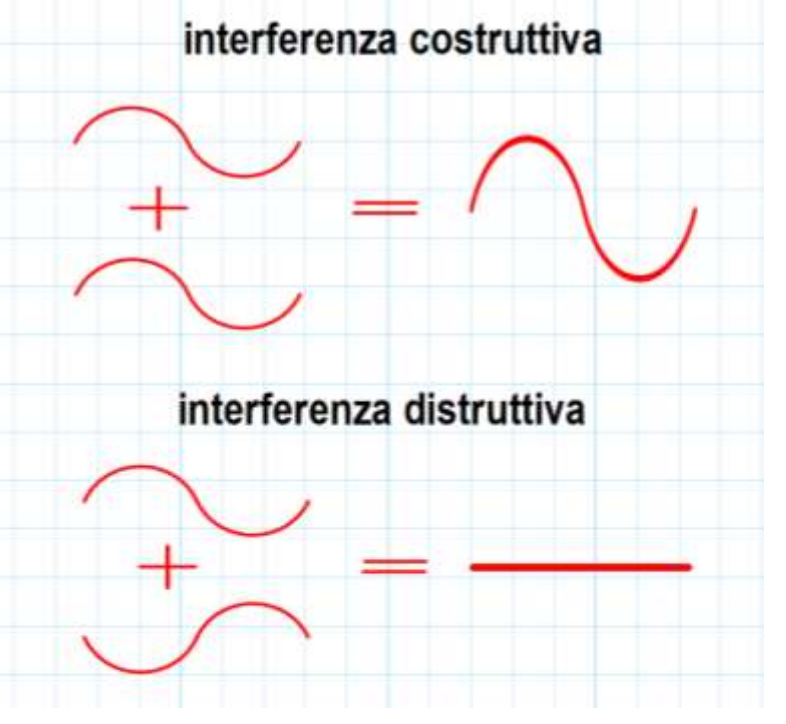


Abbiamo ridotto il problema a una dimensione

Ogni impulso può essere scomposto in un “pacchetto d'onde” (un insieme di onde che si sommano fra loro secondo le regole note) di lunghezze d'onda contenute in un certo intervallo (λmin,λmax), di ampiezza

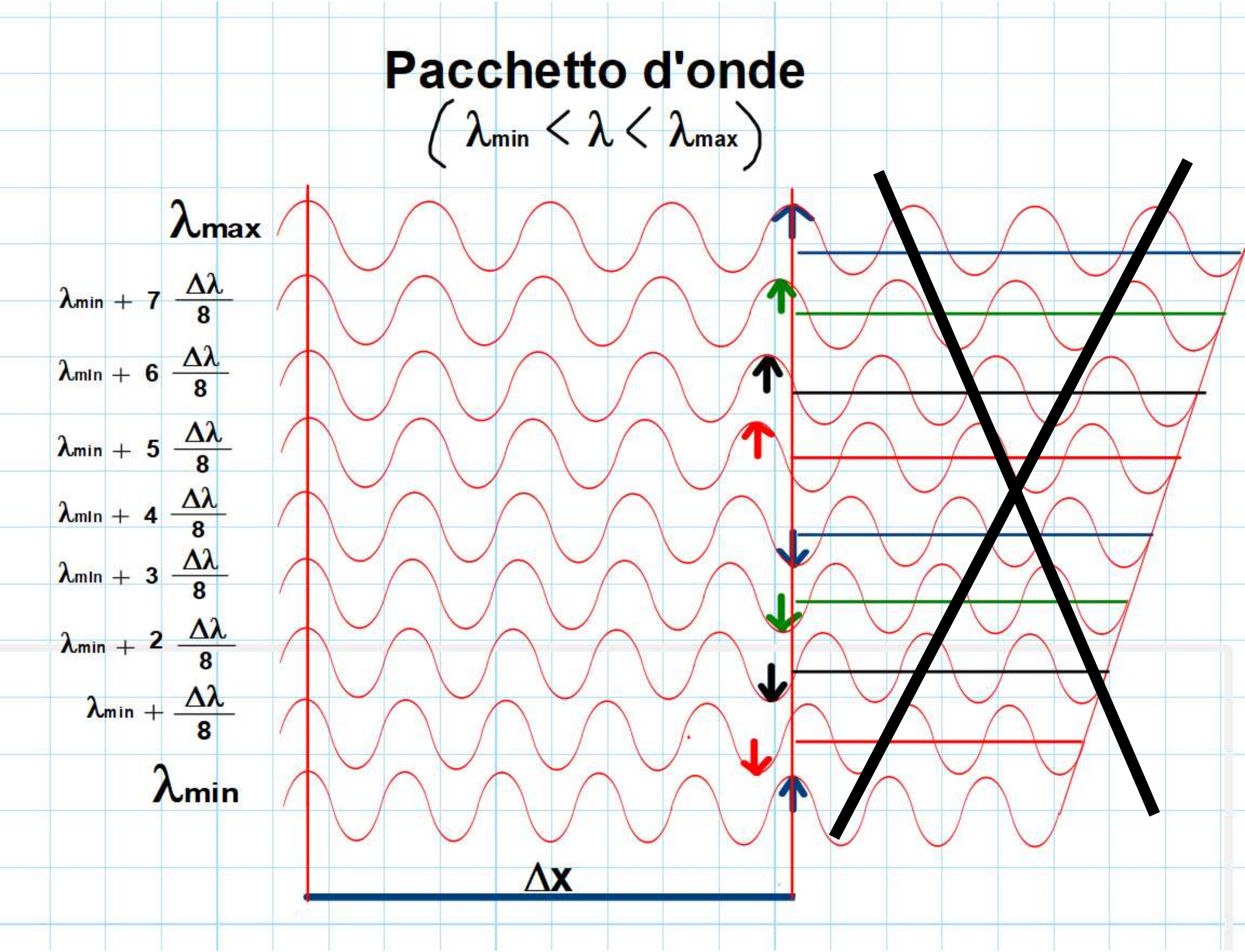
$$\Delta\lambda = \lambda max - \lambda min$$

Regole note
(mai dare niente
per scontato)



Vediamo che succede ...

Se le onde partono in fase a x = 0 si sommano costruttivamente e quindi c'è il picco dell'impulso.



Dopo Δx la più lunga e la più corta sono di nuovo in fase (differenza di un ciclo).

Quando questo succede però tutte le onde del pacchetto si trovano in opposizione di fase a due a due, quindi il pacchetto di annulla tutto! Δx è quindi la lunghezza della perturbazione trasmessa.

Un po' di calcoli

$$\frac{\Delta x}{\lambda_{MAX}} = 4 \qquad \frac{\Delta x}{\lambda_{MIN}} = 5$$

$$\frac{\Delta x}{\lambda_{MIN}} - \frac{\Delta x}{\lambda_{MAX}} = 1$$

NESSUNA OSCILLAZIONE

$$\lambda = \infty \Rightarrow \Rightarrow K = 0 = \frac{1}{\infty}$$

$$K = |\vec{K}| = \frac{1}{\lambda}$$ INDICA IL MODO DI OSCILLAZIONE

$$\Delta x\left(\frac{1}{\lambda_{MIN}}-\frac{1}{\lambda_{MAX}}\right)=\Delta x\cdot\Delta k=1$$

$$\Delta k=\frac{1}{\Delta x}$$

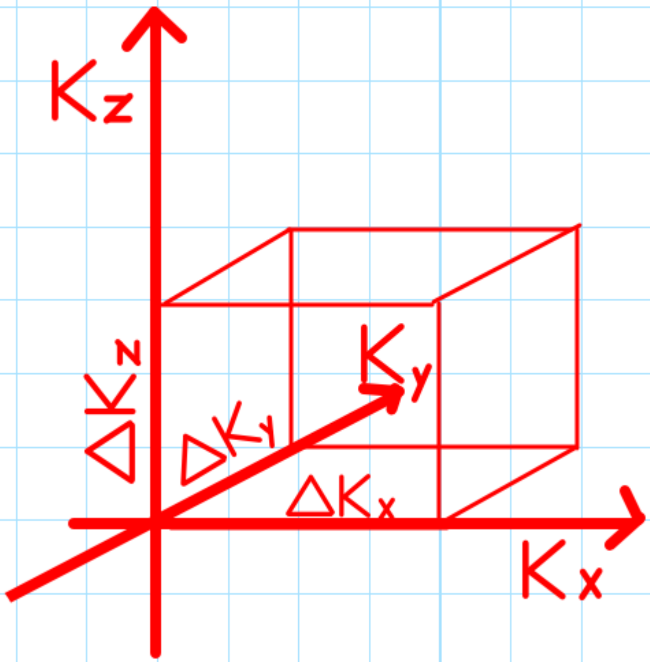
DENSITÀ LINEARE DEGLI OSCILLATORI COMPRESI TRA $k_{MIN}=\frac{1}{\lambda_{MAX}}$ E $k_{MAX}=\frac{1}{\lambda_{MIN}}$

NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE $\vec{k}$ DIVENTA UN VETTORE DI COMPONENTI (k_x, k_y, k_z)

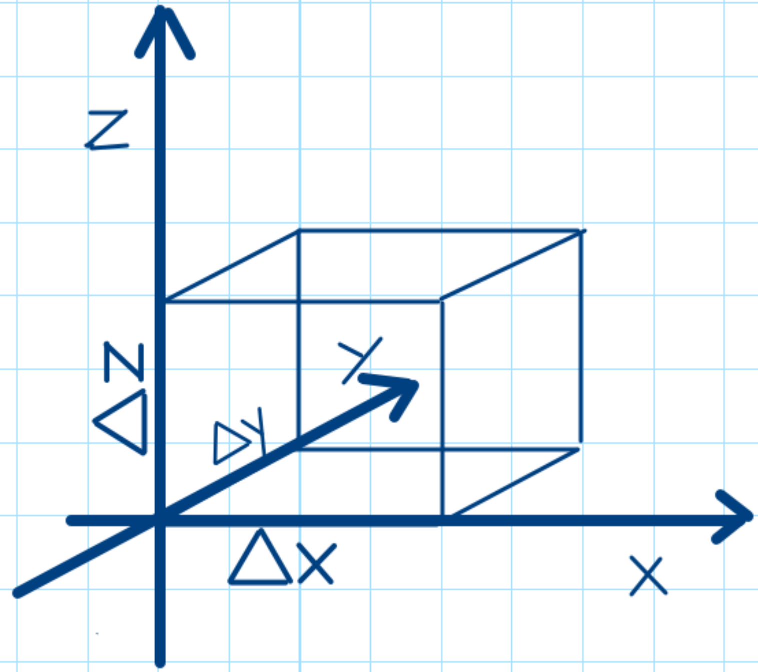
QUINDI

$$\Delta k_x\cdot\Delta k_y\cdot\Delta k_z=\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}=n$$

elemento di volume nello spazio "ondulatorio" (spazio di $\vec{k}$)



elemento di volume nello spazio visibile



$$\Delta k_x \cdot \Delta k_y \cdot \Delta k_z = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} = n$$

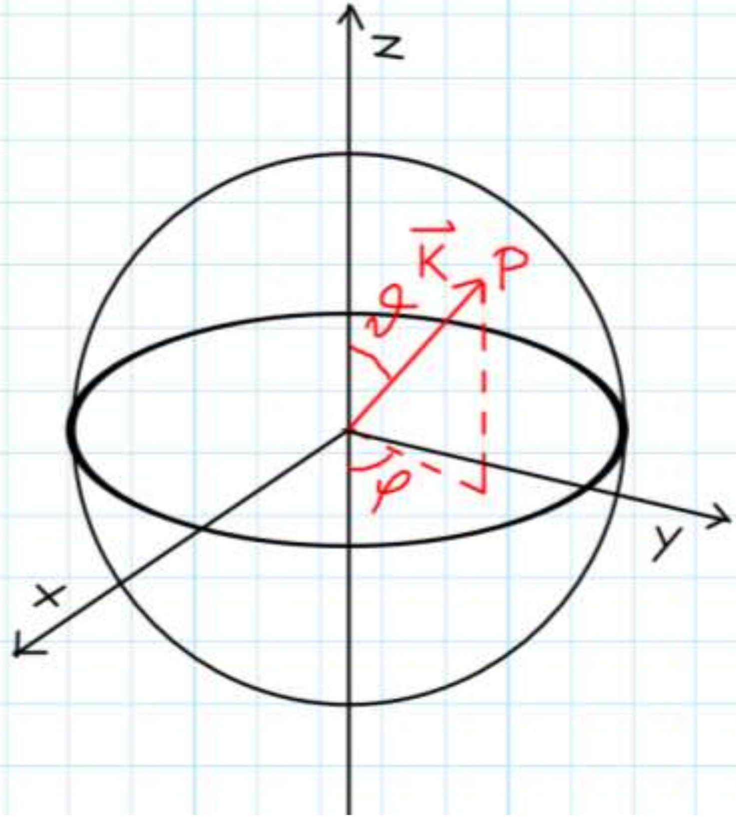
Volume nello spazio dei numeri d'onda (spazio ondulatorio)

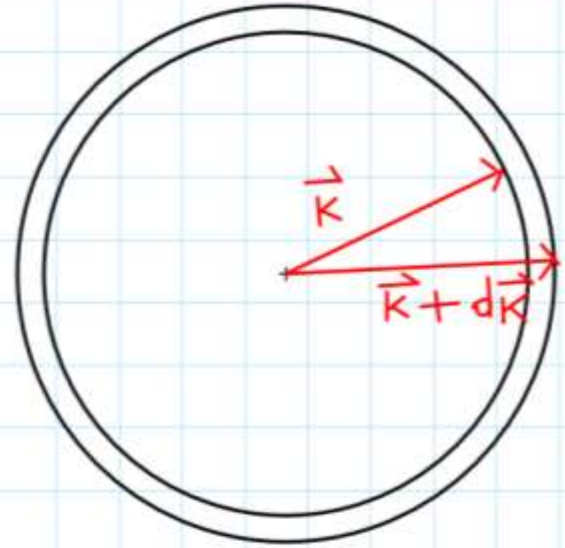
Densità degli oscillatori in un certo intervallo di numero d'onda **k** o di lunghezza d'onda λ

$$K_x = K \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi$$

$$K_y = K \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi$$

$$K_z = K \cos\vartheta$$





$$n(k, k+dk) = 4\pi k^2 dk = \cdot$$

Densità di tutti i possibili modi di oscillazione tra k e k + dk

Volume nello spazio ondulatorio del guscio sferico compreso tra k e dk

Calcoli

$$dk = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + d\lambda} = \frac{\cancel{\lambda} + d\lambda - \cancel{\lambda}}{\lambda(\lambda + d\lambda)} = \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

$$4\pi \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \boxed{\frac{4\pi}{\lambda^4}} \, d\lambda$$

(SPIEGA PERCHÈ IL CIELO È AZZURRO!)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad d\lambda = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu + d\nu} = \frac{c(\cancel{\nu} + d\nu - \cancel{\nu})}{\nu(\nu + d\nu)} = c\,\frac{d\nu}{\nu^2}$$

$$n(k, k+dk) = 4\pi k^2 \, dk = \frac{4\pi}{\lambda^4} d\lambda = \frac{4\pi}{c^{\cancel{4}}} \nu^{\cancel{4}\,2} \cdot \cancel{c}\,\frac{d\nu}{\cancel{\nu^2}} = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} d\nu$$

$$n(\nu) = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} d\nu \qquad \boxed{n(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}}$$

(2 STATI DI POLARIZZAZIONE)

DENSITÀ DI OSCILLATORI DEL CAMPO DI RADIAZIONE AL VARIARE DELLA FREQUENZA

$$n(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

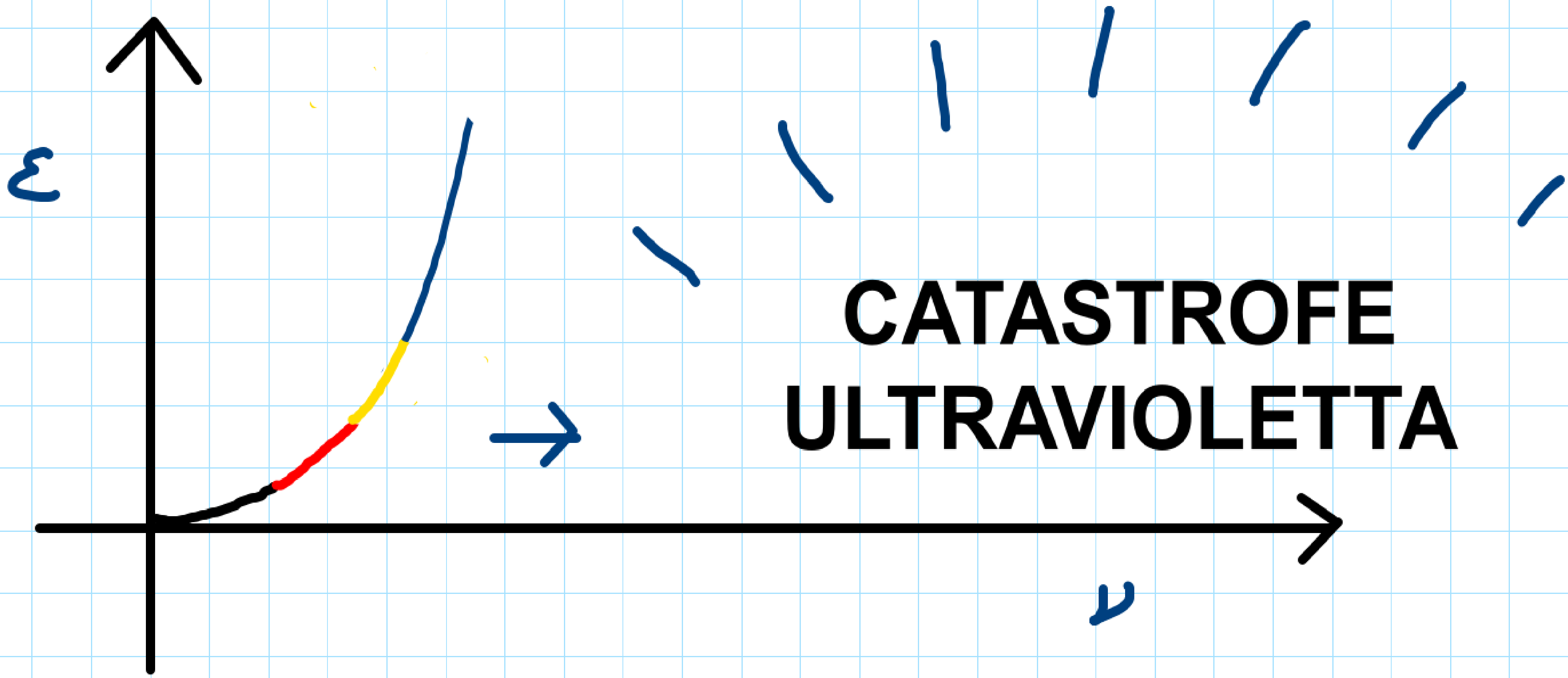
MOLTIPLICANDO PER L'ENERGIA MEDIA DI UN OSCILLATORE (KT)

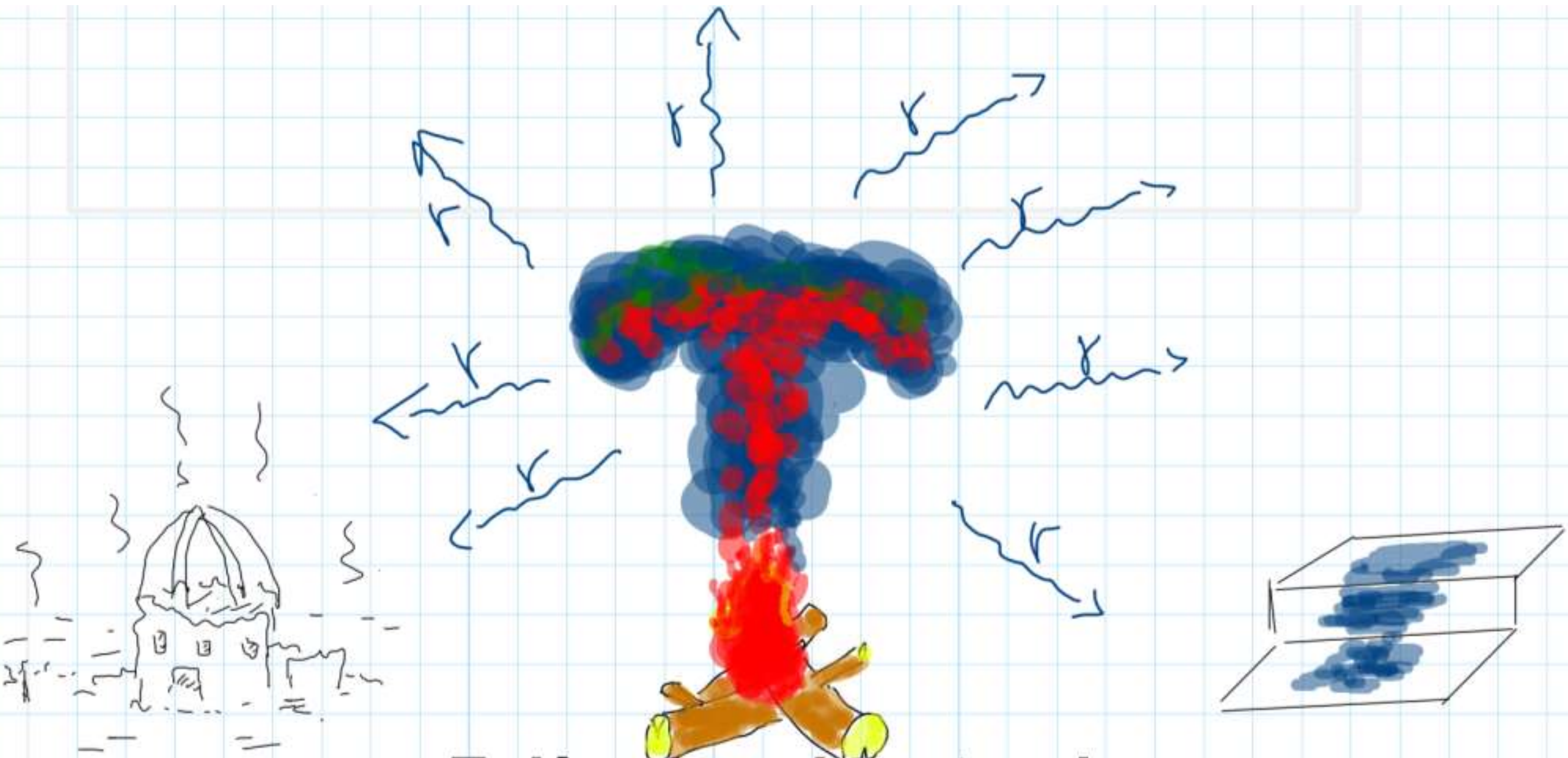
SI HA

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} KT} \Longrightarrow$$

(DENSITÀ DI RADIAZIONE TERMICA A FREQUENZA ν) CIOÈ

CATASTROFE ULTRAVIOLETTA





Falò = bomba atomica


SEI DIMAGRITA, CARA...
PALESTRA? DIETA?
NO, CATASTROFE ULTRAVIOLETTA!

COME EVITARE LA

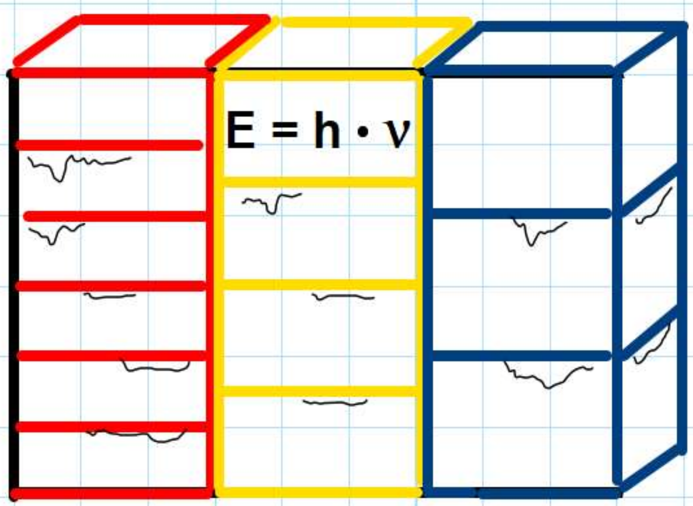
"CATASTROFE ULTRAVIOLETTA"!

OGNI OGGETTO A UN QUALSIASI TEMPERATURA COSTANTE SAREBBE UNA MORTALE SORGENTE DI RAGGI γ

... NOI COMPRESI

L'ipotesi dei “quanti” di luce

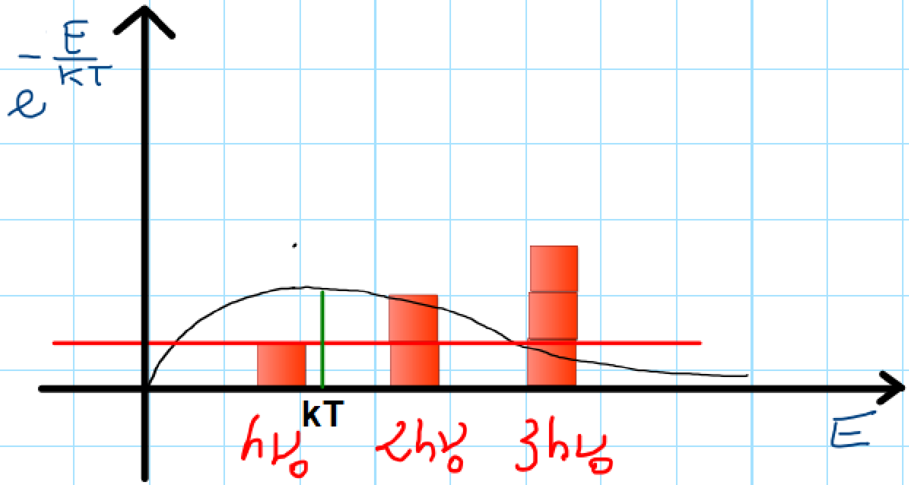
La soluzione si chiama "radiazione quantizzata": ogni modo di oscillazione può assorbire e cedere soltanto radiazione in quantità multipla di un valore fondamentale direttamente proporzionale alla frequenza). Nasce la "Legge di Planck" (dicembre 1900).

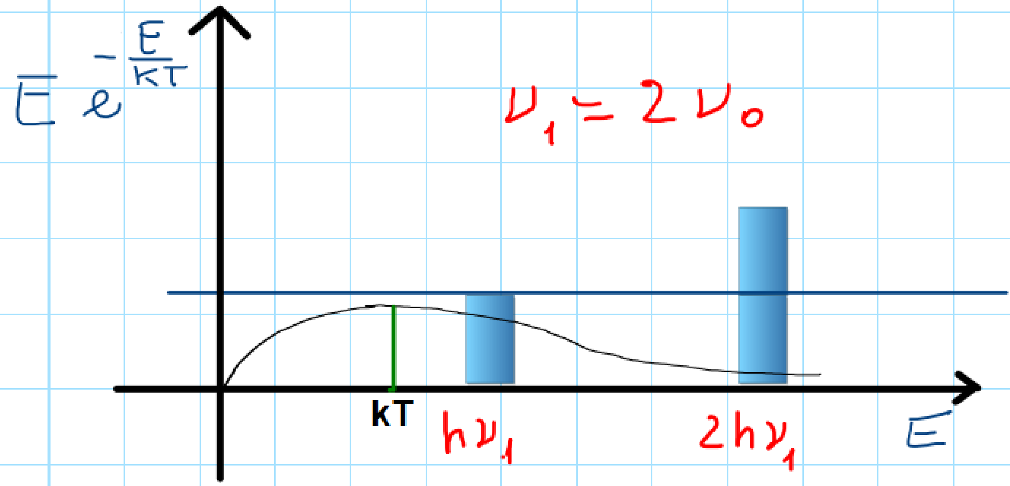


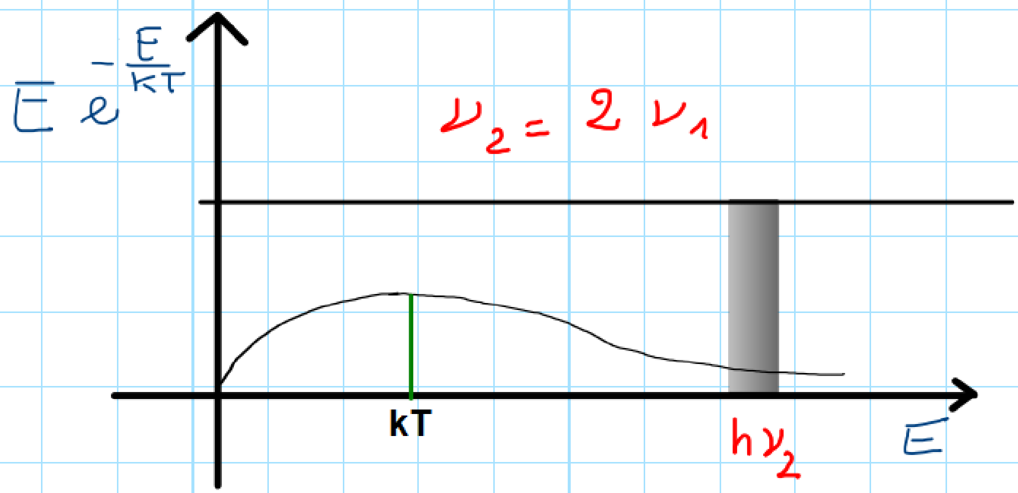
$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Joule × sec

MAX PLANCK (1858-1947)

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} E\, e^{-\frac{E}{kT}}\, dE}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{kT}}\, dE} \longrightarrow \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} n h\nu\, e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = \ldots\ldots$$







Energia media di un oscillatore quantizzato

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\varepsilon = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Spettro del corpo nero (densità di energia della radiazione termica di un corpo a temperatura costante T in funzione della frequenza)

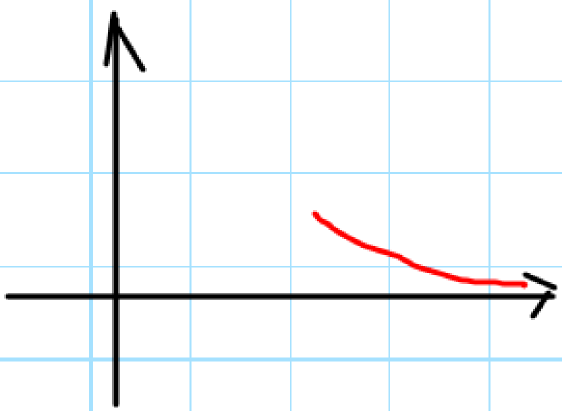
Fotoni ad alta energia

$$h\nu \gg KT \qquad e^{\frac{h\nu}{KT}} \gg 1$$

$$\frac{h\nu}{KT} \gg 1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E}(\nu) \approx \frac{8\pi\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{KT}}$$



Fotoni a bassa energia (RADIO)

$$h\nu \ll KT$$

$$\frac{h\nu}{KT} \ll 1$$

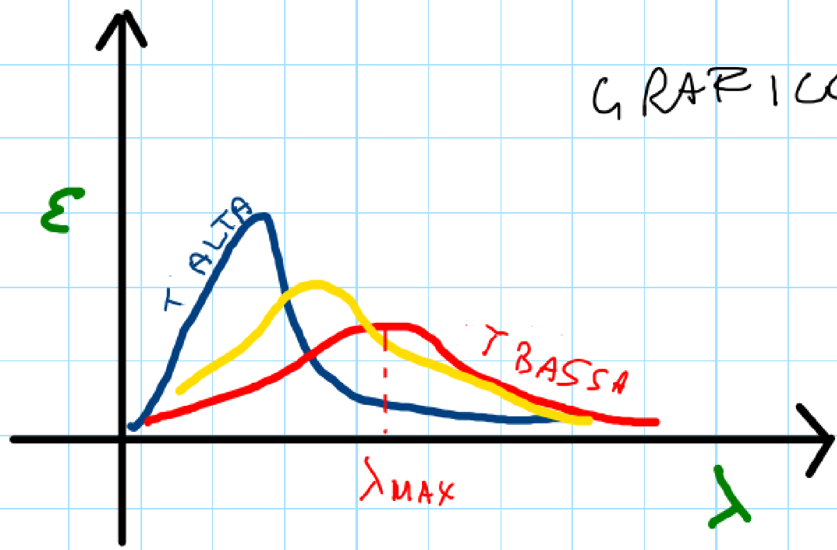
$$e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \approx \frac{h\nu}{KT}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E}(\nu) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\frac{h\nu}{KT}} = \frac{8\pi \cancel{h}\nu^{\cancel{3}\,2}}{c^3}\frac{KT}{\cancel{h\nu}} = \frac{8\pi\nu KT}{c^3}$$

legge di Rayleigh - Jeans

GRAFICO (CURVE DI PLANCK)



(1) $\dfrac{h\nu_{MAX}}{KT} \simeq 2{,}82 \longrightarrow \boxed{\lambda_{max} \cdot T \approx 2{,}82\,\dfrac{hc}{K}}$

LEGGE DI WIEN

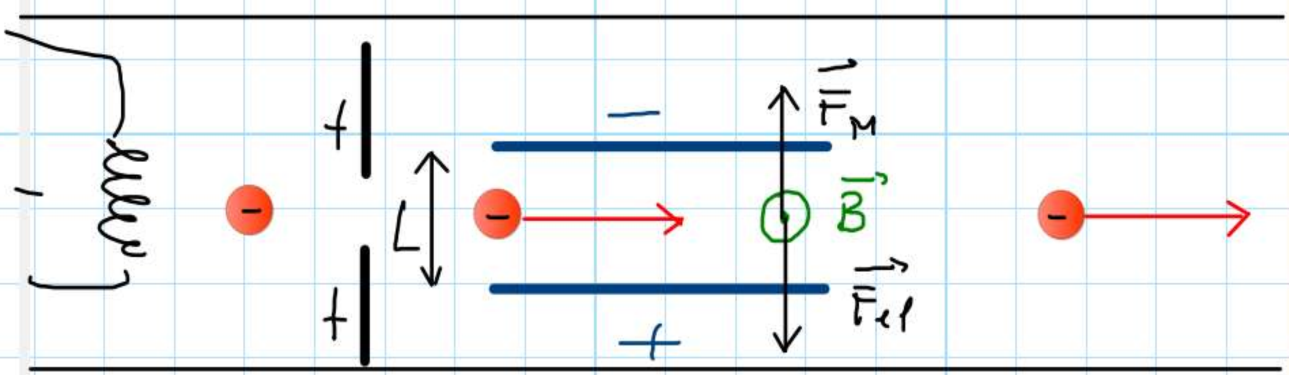
(2) INTENSITÀ LUMINOSA TOTALE INTEGRATA SU TUTTE LE FREQUENZE

$$I = \sigma T^4$$

$$\left[\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{cm^2\ {}^\circ K^4} \\ \hbar &= \frac{h}{2\pi} \end{aligned}\right]$$

Intanto a Cambridge ...

ESPERIMENTO DI J.J. THOMSON (1896)

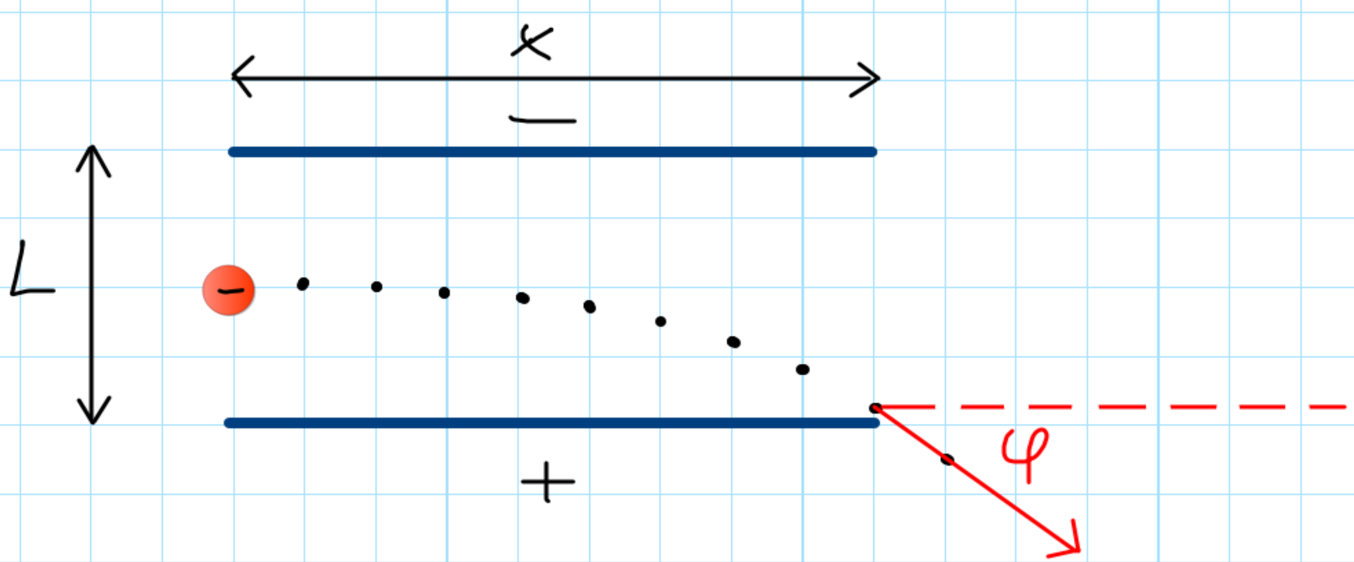


FASE (1): $F_M = F_{el}$ $\quad q v B = q E$

$$q v B = q \frac{V}{L} \Rightarrow \boxed{v = \frac{V}{BL}}$$

TROVO LA VELOCITÀ DEI RAGGI CATODICI EQUILIBRANDO LA FORZA MAGNETICA CON UN CONTRO-POTENZIALE ELETTRICO

FASE (2): TROVATA v, TOLGO IL CAMPO MAGNETICO, E LASCIO CHE IL CAMPO ELETTRICO $E = \frac{V}{L}$ DEVI[...] IL FASCETTO CATODICO.



$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} a t^2 \\ x &= v t \\ v &= \frac{V}{BL} \\ a &= \frac{F_{el}}{m} = \frac{qV}{mL} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{qV}{mL} \left(\frac{x}{v}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{\cancel{V}}{\cancel{L}} \frac{x^2 B^2 L^{\cancel{2}}}{V^{\cancel{2}}}$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{B^2 L}{V} \cdot \frac{q}{m} \cdot x^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{B^2 L x}{V} \cdot \boxed{\frac{q}{m}}$$

I RAGGI CATODICI SONO FATTI DI CORPUSCOLI CARICHI NEGATIVAMENTE: LE PRIME PARTICELLE SUBATOMICHE SCOPERTE (GLI ELETTRONI)

I conti tornano … ma sono solo “conti”?

ALLA FINE UN TRUCCO MATEMATICO
FA TORNARE I CONTI:

LA QUANTIZZAZIONE DELLA LUCE PERMETTE DI SPIEGARE

(1) LA LEGGE DI WIEN

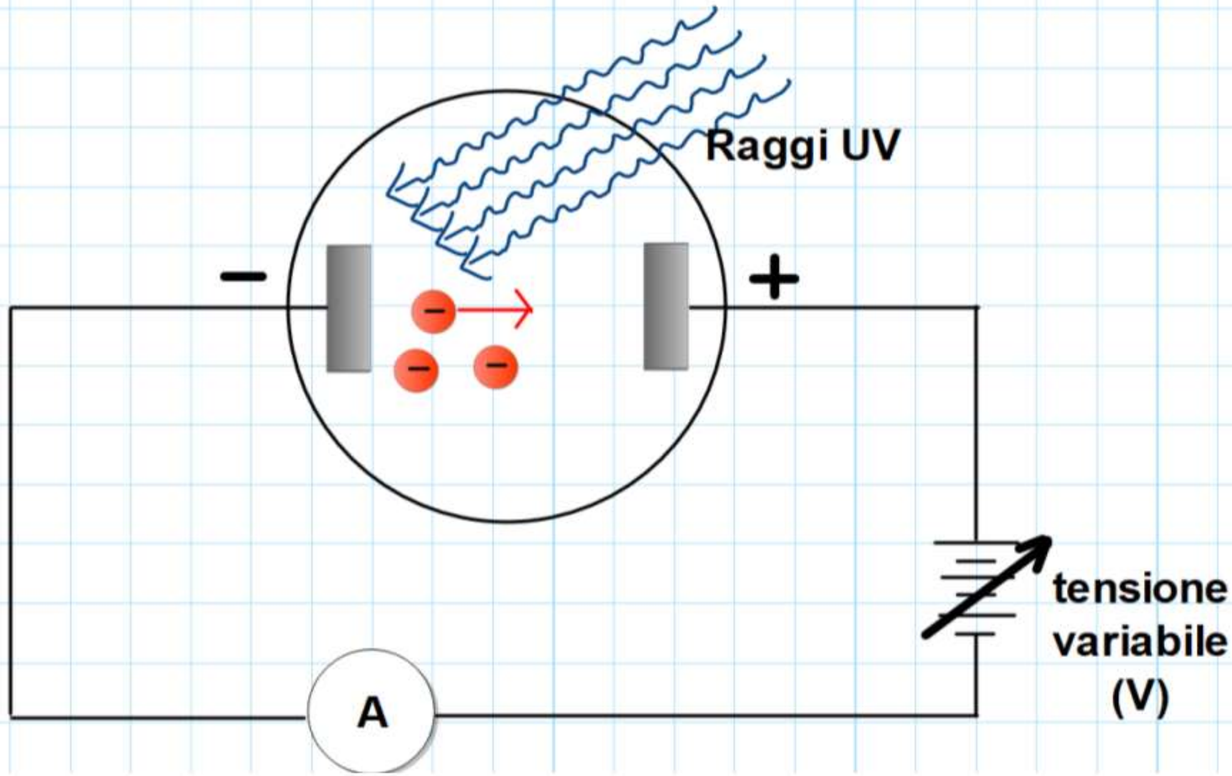
(2) LA LEGGE DI KIRCHHOFF DELLA DIPENDENZA DELLA INTENSITÀ DI RADIAZIONE TERMICA DALLA SOLA T.

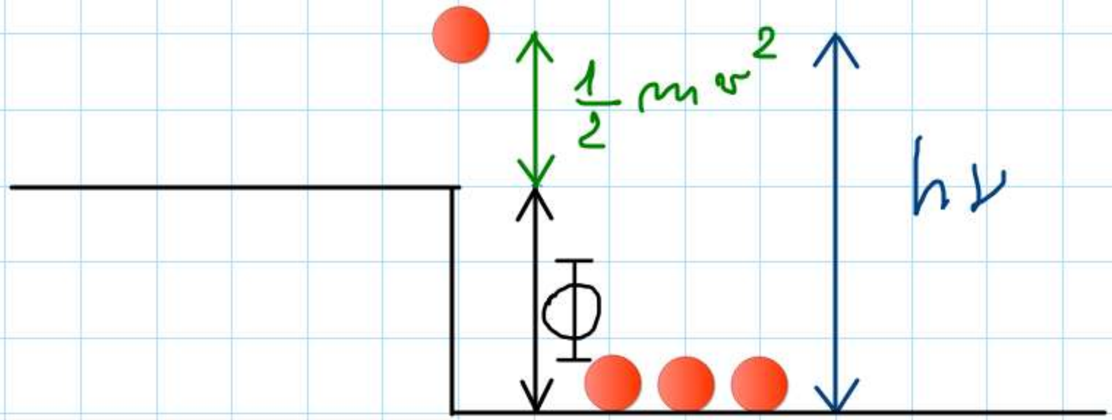
MA CHE DIAVOLO SONO QUESTI "QUANTI DI LUCE"?

1905:

EINSTEIN
INTERPRETA
L'EFFETTO
FOTOELETTRICO

(PREMIO
NOBEL
1921
CON
P. LENARD)





L'ENERGIA POTENZIALE DI CONTRO CAMPO BLOCCA LA CORRENTE FOTOELETTRICA QUANDO

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 \quad (V = \text{d.d.p.})$$

$$eV = h\nu - \Phi$$

$$\Phi = h\nu_0 \quad \left(\text{CON } \nu_0 = \text{FREQUENZA DI SOGLIA}\right)$$

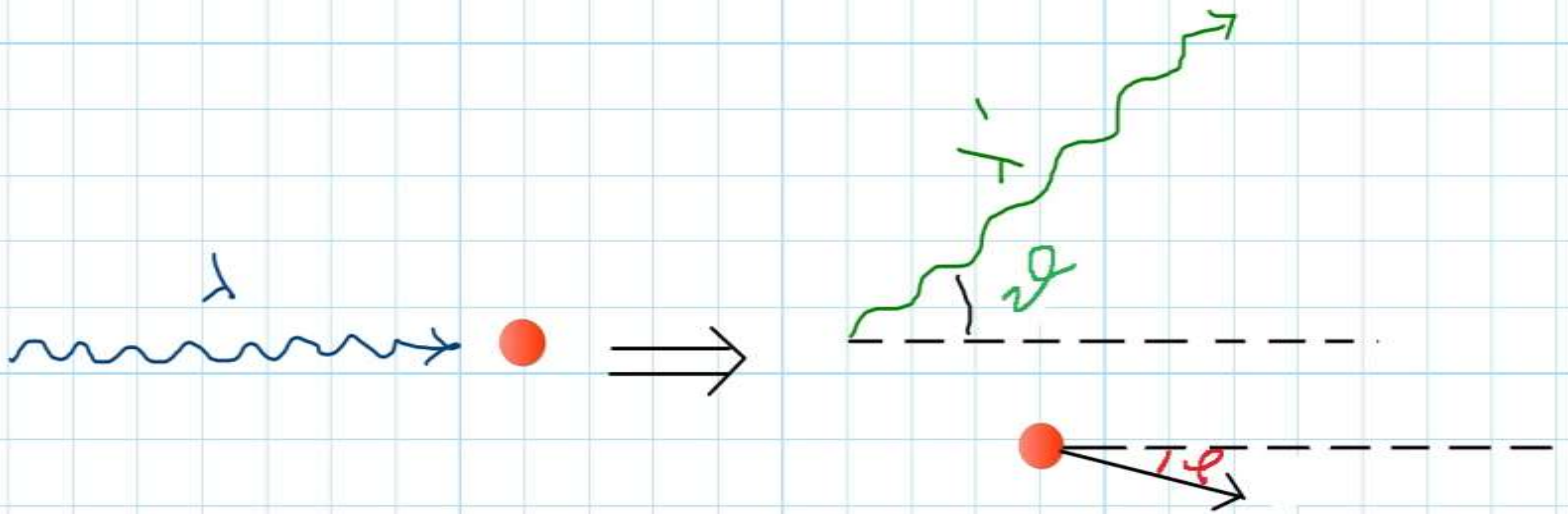
IN PRATICA LA CORRENTE FOTOELETTRICA SI SVILUPPA SOLTANTO SE LA FREQUENZA DELLA RADIAZIONE INCIDENTE È

$$\nu > \nu_0 \ldots$$

QUINDI ...

I QUANTI DI LUCE DIVENTANO CORPUSCOLI (I "FOTONI")

Altra prova della natura corpuscolare della luce: l'effetto Compton (1922)



$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\vartheta)$$

Diffusione di raggi X da parte di un elettrone = urto fotone – elettrone
(il fotone cambia lunghezza d'onda)