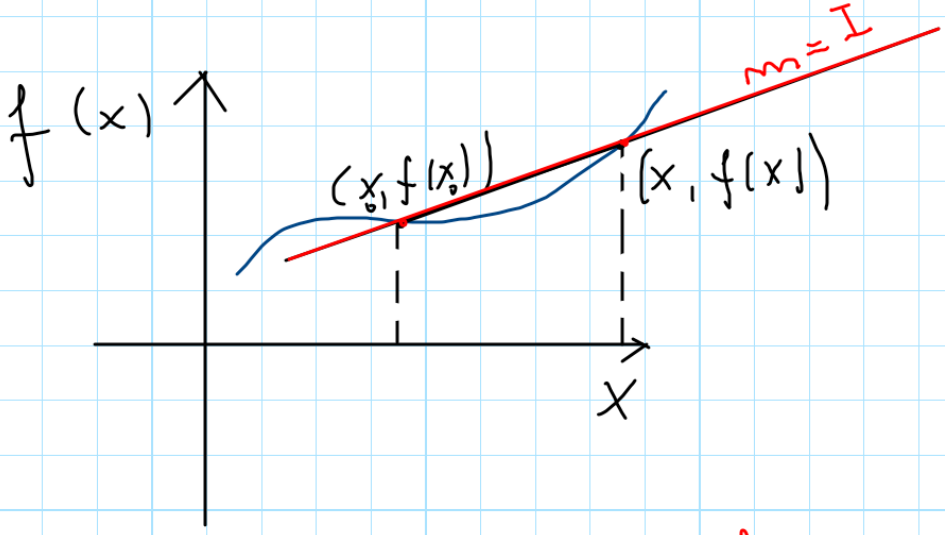
STELLE

Le basi fisiche della struttura stellare

(lezione 1)

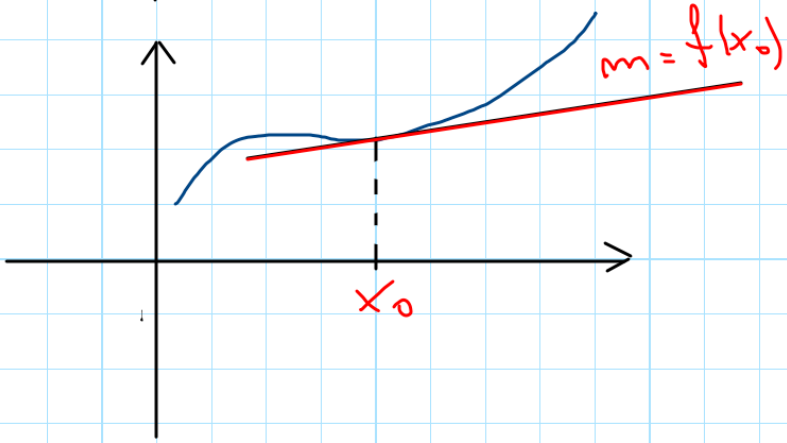
Ripassino di matematica: le derivate



$\Delta x = x - x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = I$$

RAPPORTO INCREMENTALE



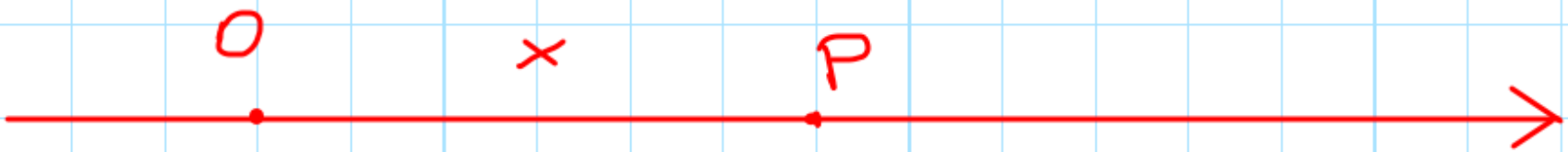
$$\lim_{x \to x_0 \ (\Delta x \to 0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

DERIVATA

In sintesi la derivata di una funzione f(x) descrive la rapidità della sua variazione al variare della variabile x.

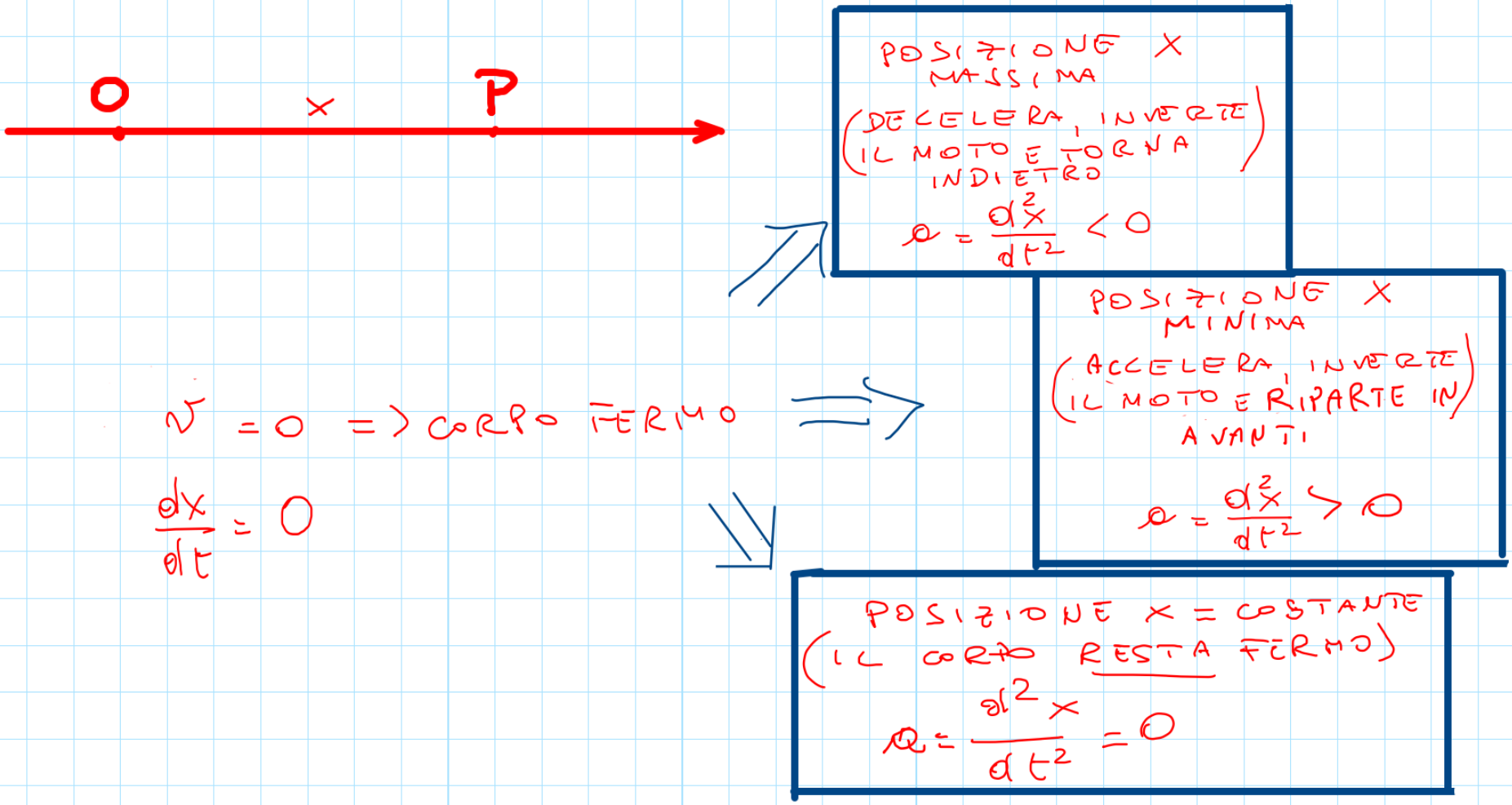
Ad esempio la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo (esprime quanto rapidamente varia la posizione al trascorrere del tempo).

Allo stesso modo l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo (esprime quanto rapidamente varia la velocità al trascorrere del tempo).



$$v = \frac{dx}{dt}$$

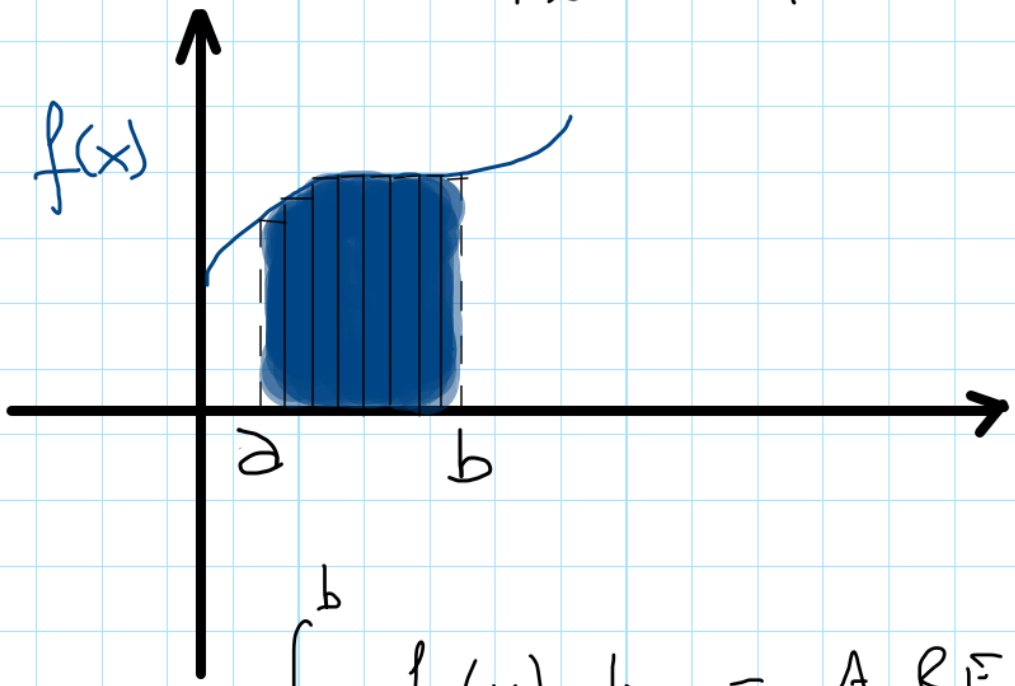
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$



Questo vale per ogni grandezza fisica che varia nel tempo.

L'integrale

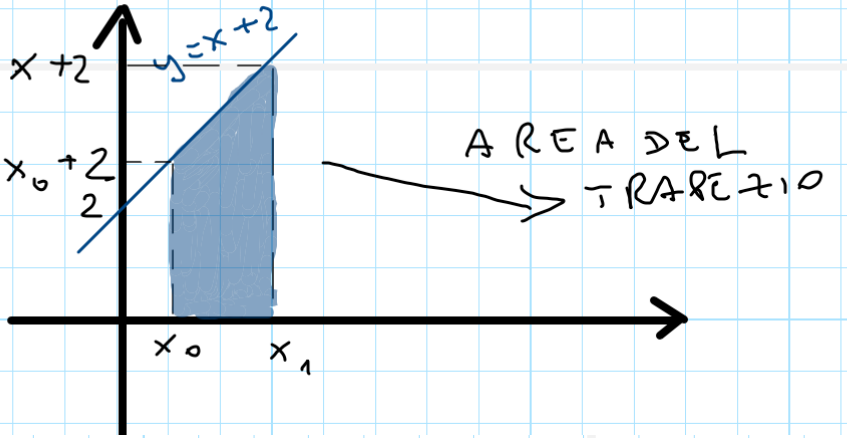
INTEGRALE = AREA



$$\int_a^b f(x)\,dx$$ = AREA COMPRESA TRA IL GRAFICO E L'ASSE X (DA $x=a$ A $x=b$)

CALCOLO DELL'INTEGRALE:

SI RISALE DA UNA FUNZIONE $f(x)$ ALLA SUA PRIMITIVA $F(x)$ TALE CHE $F'(x) = f(x)$



AREA DEL TRAPEZIO

$$\int_{x_0}^{x} (x+2)\,dx =$$

$$= \frac{\overbrace{(x_1+2)}^{B} + \overbrace{(x_0+2)}^{b}}{2} \cdot \overbrace{(x_1-x_0)}^{h} =$$

$$= \frac{(x_1+x_0)(x_1-x_0)}{2} + \frac{2(x_1-x_0)}{2} =$$

$$= \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + 2x_1 - 2x_0 = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{x_0}^{x_1} = F(x_1) - F(x_0)$$

PRIMITIVA

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 2x - \left(\frac{x_0^2}{2} + 2x_0\right)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x^2 - x_0^2}{2} + 2(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{(x - x_0)(x + x_0)}{2(x - x_0)} + \frac{2(x - x_0)}{x - x_0}}{} = \frac{2x_0}{2} + 2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = x + 2 = f(x)$$

Definizione di stella

E’ una massa autogravitante di gas incandescente, in equilibrio e che ha attivi al suo interno meccanismi di produzione di energia.

Proprietà caratteristiche

- Una stella è fatta di gas: lo spettro di corpo nero del Sole e la sua analisi hanno rivelato come la sua temperatura superficiale sia tanto elevata da non consentire alcun altro stato di aggregazione della materia che quello gassoso.

La elevata temperatura del gas stellare rende trascurabili le interazioni tra le particelle del gas: il gas può essere considerato un "gas perfetto" (o "ideale") e descritto fisicamente dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$p \cdot V = nRT$$

(p = pressione, V = volume, T = temperatura assoluta, n = numero di moli, R = costante universale dei gas perfetti)

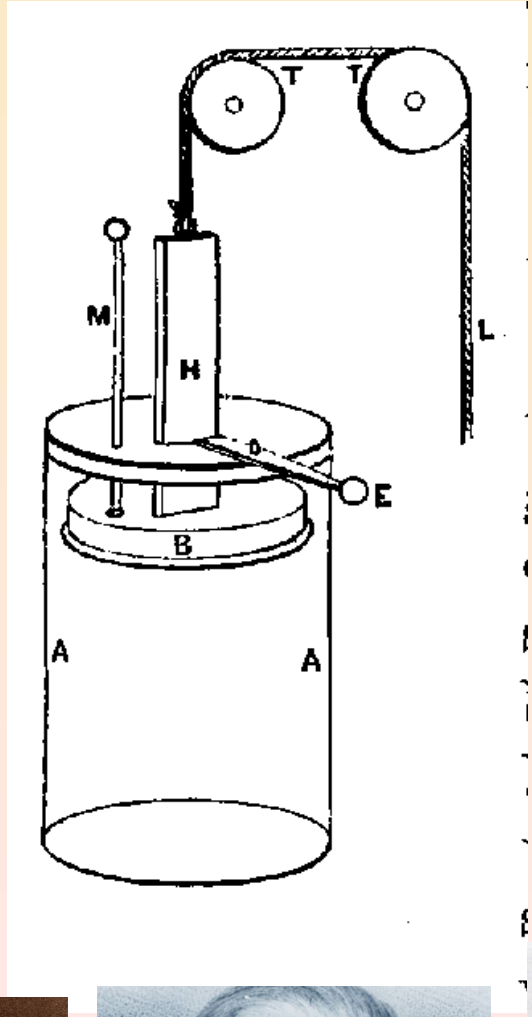
Prime leggi empiriche che descrivono il comportamento dei gas (le trasformazioni)

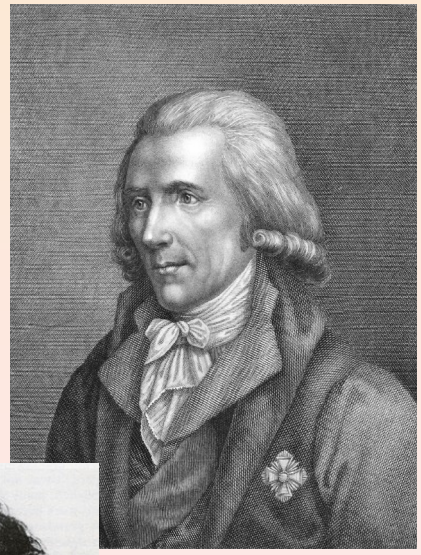
$p_1 V_1 = p_2 V_2$ (T COSTANTE)

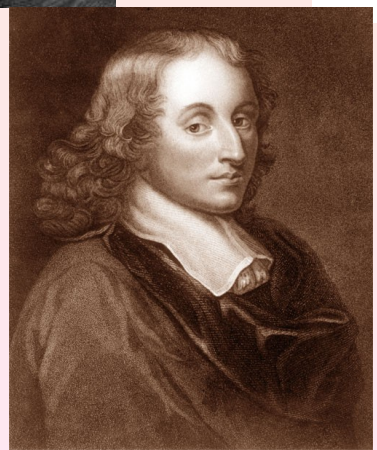
$p = p_0 (1 + \alpha t)$ (V COSTANTE)

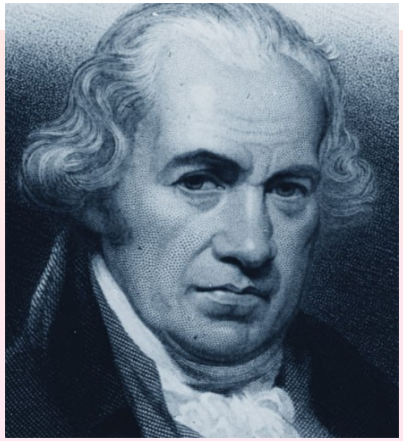
$V = V_0 (1 + \alpha t)$ (p COSTANTE)

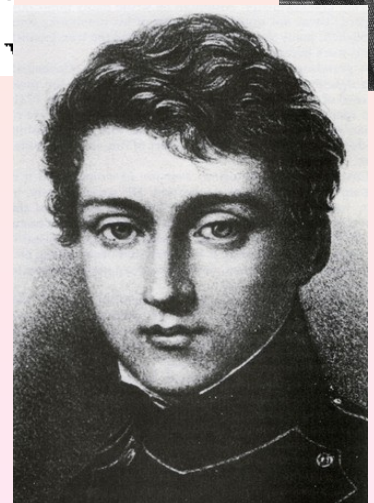
$\alpha = \frac{1}{273°C}$


T
T
M
H
L
E
B
A
A









Dalle leggi empiriche all'equazione di stato (la temperatura assoluta o Kelvin)

$$p = p_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right) = p_0 \left(\frac{273°C + t}{273°C}\right)$$

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} \leftarrow 0 \text{ ASSOLUTO (KELVIN)}$$

V COSTANTE $\Rightarrow \frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}$

p COSTANTE $\Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}$

T COSTANTE $\Rightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 V_2$

$\Rightarrow \frac{p \cdot V}{T} = \text{COST}$

Gas “perfetti” ...

$$p \cdot V = n R T$$

n = numero di moli

$R = 8{,}31 \ \frac{J}{mole \cdot {}^\circ K}$

E gas “reali”

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(V - nb\right) = n R T$$

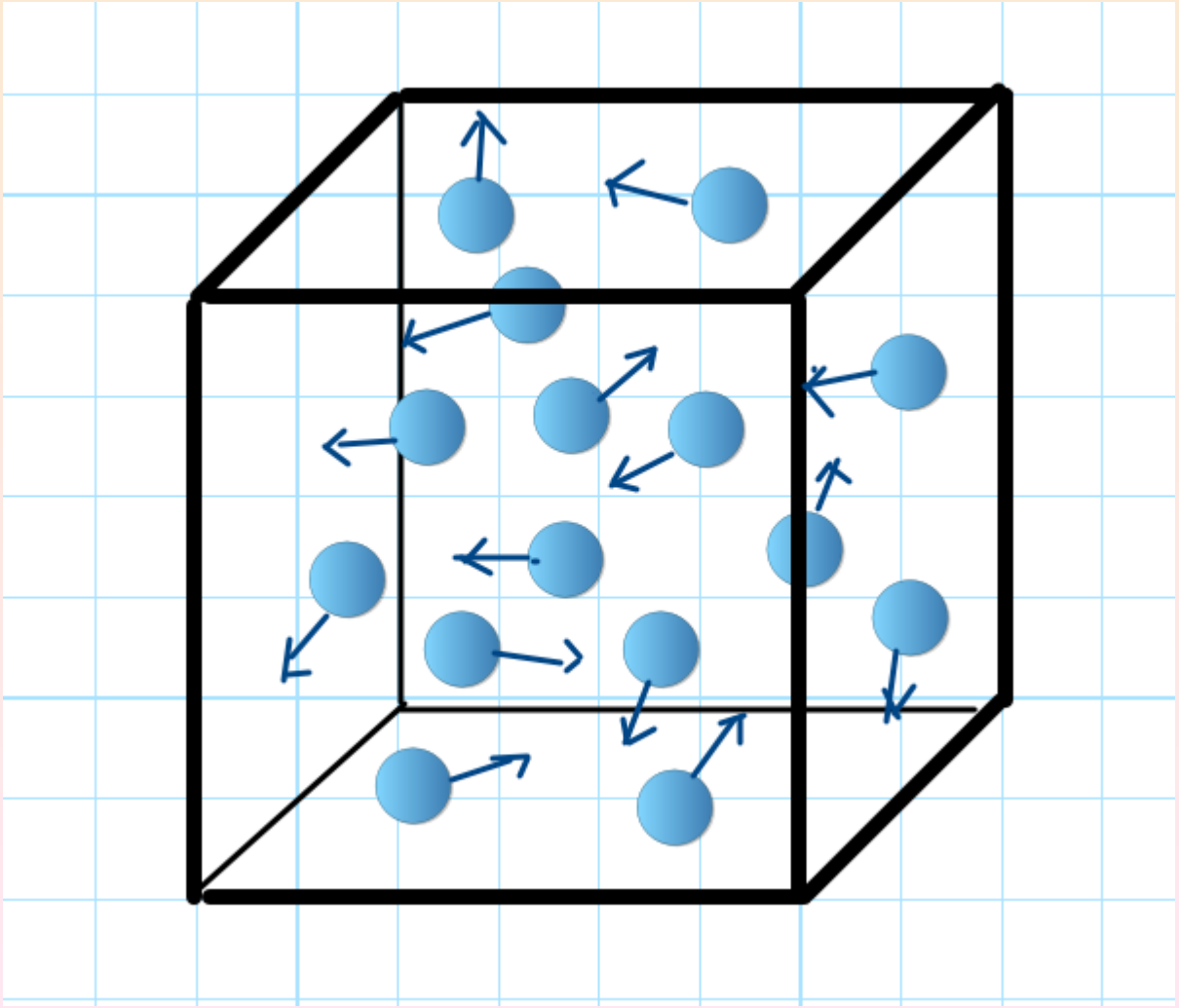
EQUAZIONE DI VAN DER WAALS

Il modello del gas “perfetto” o “ideale” è un modello valido per descrivere il gas stellare in quanto quest'ultimo ha:

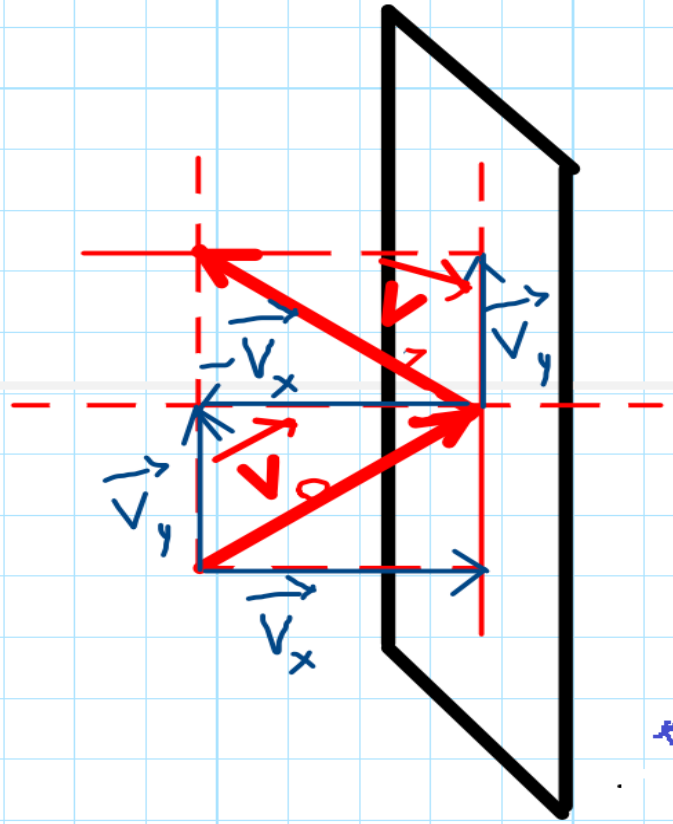
1) bassa densità (i suoi costituenti elementari hanno distanze molto maggiori delle loro dimensioni)

2) elevata temperatura (la pressione è determinata essenzialmente dall'energia cinetica molecolare e non dalla repulsione degli involucri molecolari)

Sulla natura atomica dei gas: la teoria cinetica



Quantità di moto ceduta ad una parete per ogni urto (III legge della dinamica)



$$\Delta V_x = -V_x - V_x$$

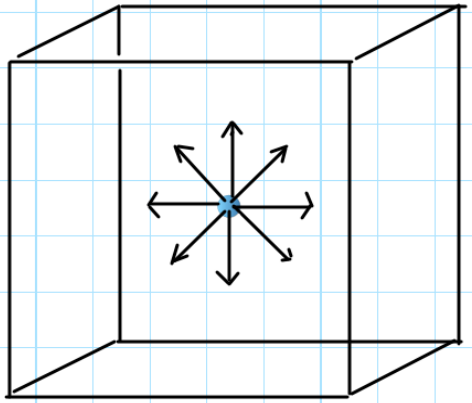
$$\Downarrow$$

$$\Delta V_x = -2V_x$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\leftarrow \Delta p_x = -2mV_x$$

CONTRO LA PARETE $\rightarrow \Delta p = -\Delta p_x = 2mV$

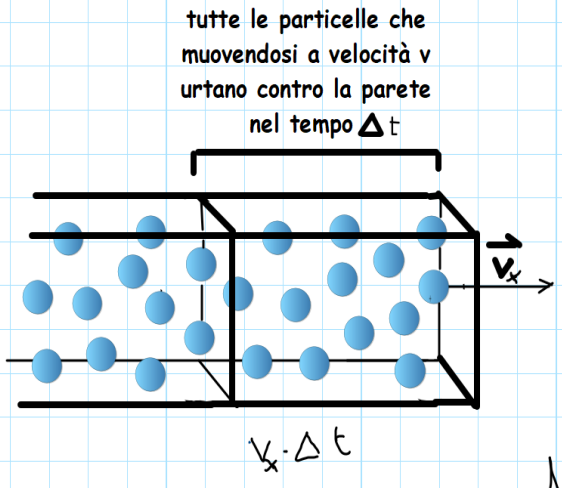


STATISTICA DI BOLTZMANN

⇓

DISTRIBUZIONE ISOTROPA DELLE VELOCITÀ

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$



n = DENSITÀ VOLUMETRICA DEI CORPUSCOLI

$$n = \frac{N}{V} \quad \left(\frac{\text{NUMERO}}{\text{VOLUME}}\right)$$

$$N = n \cdot V = n \cdot v_x \cdot \Delta t \cdot A$$

(AREA DELLA PARETE)

NUMERO DI CORPUSCOLI CHE URTANO LA PARETE NEL TEMPO Δt.
(NUMERO URTI IN Δt)

POICHÈ OGNUNA TRASFERISCE ALLA PARETE UNA QUANTITÀ DI MOTO $2mv_x$ AD OGNI URTO

⇓

NEL TEMPO Δt ALLA PARETE VIENE TRASFERITA QUANTITÀ DI MOTO COMPLESSIVA

$$\Delta p = 2mv_x \cdot nv_x \Delta t$$

POICHÈ LA FORZA PER IL II° PRINCIPIO DELLA DINAMICA È

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \left(m \frac{dv}{dt} \right)$$

CIOÈ $$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

LA FORZA D'URTO DELLE PARTICELLE CONTRO LA PARETE È

$$F = \frac{2 n m \langle v^2 \rangle}{6}$$

← MA PERCHÈ 6 ?

Visto che le particelle di un gas sono tante (ma tante!) si considera una media statistica

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i}{N} = \frac{\int_0^{+\infty} v f(E)\, dE}{\int_0^{+\infty} f(E)\, dE = 1}$$

(MEDIA)

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} v^2}{N} = \frac{\int_0^{+\infty} v^2 f(E)\, dE}{\int_0^{+\infty} f(E)\, dE = 1}$$

(MEDIA QUADRATICA)

LA DISTRIBUZIONE SPAZIALE E DI VELOCITÀ DELLE PARTICELLE È OMOGENEA E ISOTROPA

(IPOTESI DELLA STATISTICA DI L. BOLTZMANN)

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

$$\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$$

LE PARTICELLE HANNO LA STESSA PROBABILITÀ DI MUOVERSI IN ENTRAMBI I VERSI

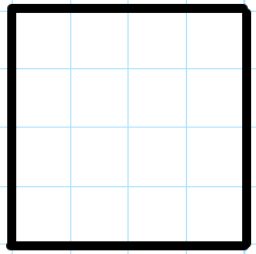
$$\Downarrow$$

QUINDI CONTRO LA STESSA PARETE URTA LA METÀ DELLE PARTICELLE DELLA SCATOLA ($\frac{N}{2}$ INVECE DI N)

PROSEGUENDO

$$P = \frac{F}{A}$$

PRESSIONE = $\frac{\text{FORZA}}{\text{AREA TRASVERSALE SU CUI VIENE ESERCITATA}}$



l

$$A = l^2$$

$$P = \frac{\frac{1}{2} n m \langle v^2 \rangle l^2}{\frac{6}{3} l^2} = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle$$

MA $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = E_c$ ENERGIA CINETICA MOLECOLARE MEDIA

QUINDI CON UN PÒ DI ALGEBRA

$$E_c = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{P}{m} = \frac{3}{2} \frac{m_{mol} R T}{m V} = \frac{3}{2} \frac{n_{mol} \cdot RT}{N}$$

N = NUMERO DI MOLECOLE

$N = N_A \cdot n_{mol}$ → NUMERO DI MOLI

↓

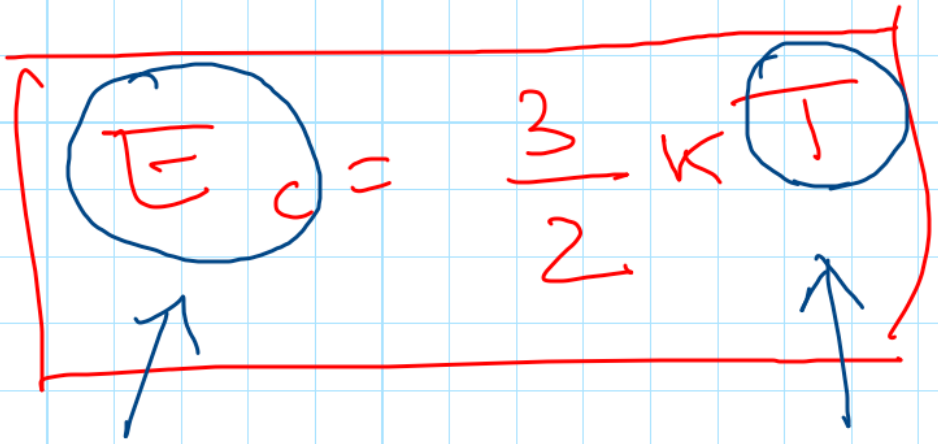
NUMERO DI MOLECOLE IN UNA MOLE

⇓

$$E_c = \frac{3}{2} \frac{m_{mol}}{N_A \cdot m_{mol}} R T$$

$\frac{R}{N_A} = K = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{°K}$

COSTANTE DI BOLTZMANN



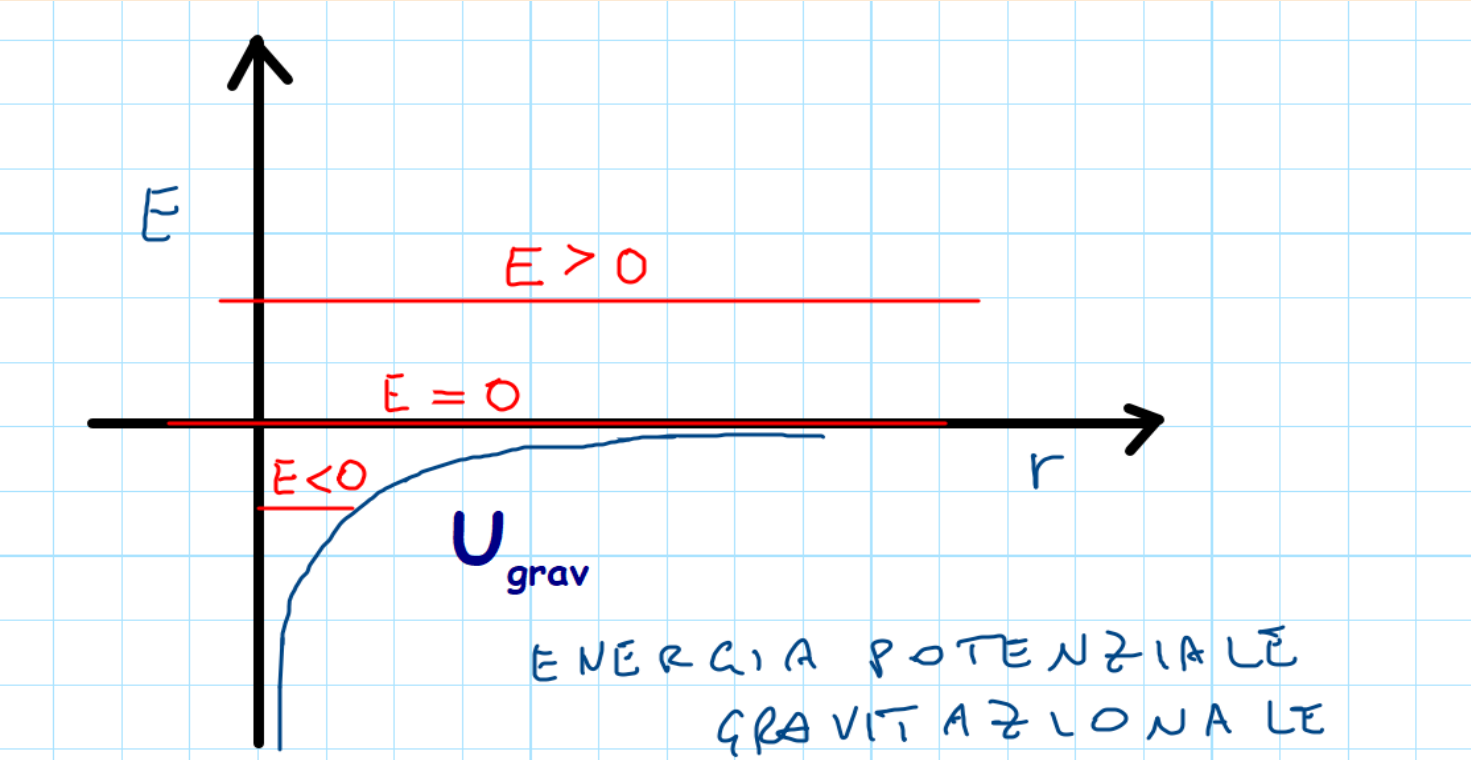
ENERGIA CINETICA MEDIA DI UNA MOLECOLA

GRANDEZZA RELATIVA LE SINGOLE MOLECOLE (DINAMICA)

GRANDEZZA MACROSCOPICA (TERMODINAMICA)

La formazione di una stella dall'instabilità alla stabilità

Energia di un corpo soggetto alla gravità



ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$U_g = -\frac{GMm}{r}$$

Moto “libero” e moto “legato”: considerazioni energetiche

$$E_{tot} = T + U$$

ENERGIA MECCANICA TOTALE — ENERGIA CINETICA — ENERGIA POTENZIALE

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

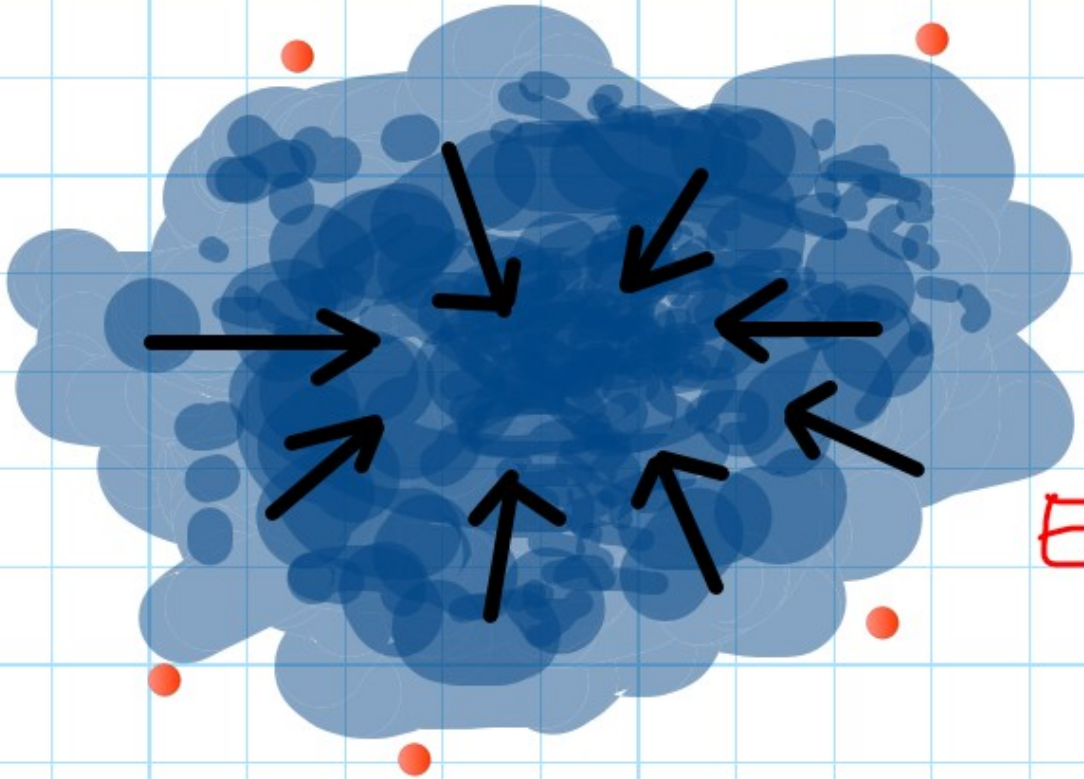
$E < 0$

MOTO "LEGATO"
(m È CATTURATO DA M)

$E \geq 0$

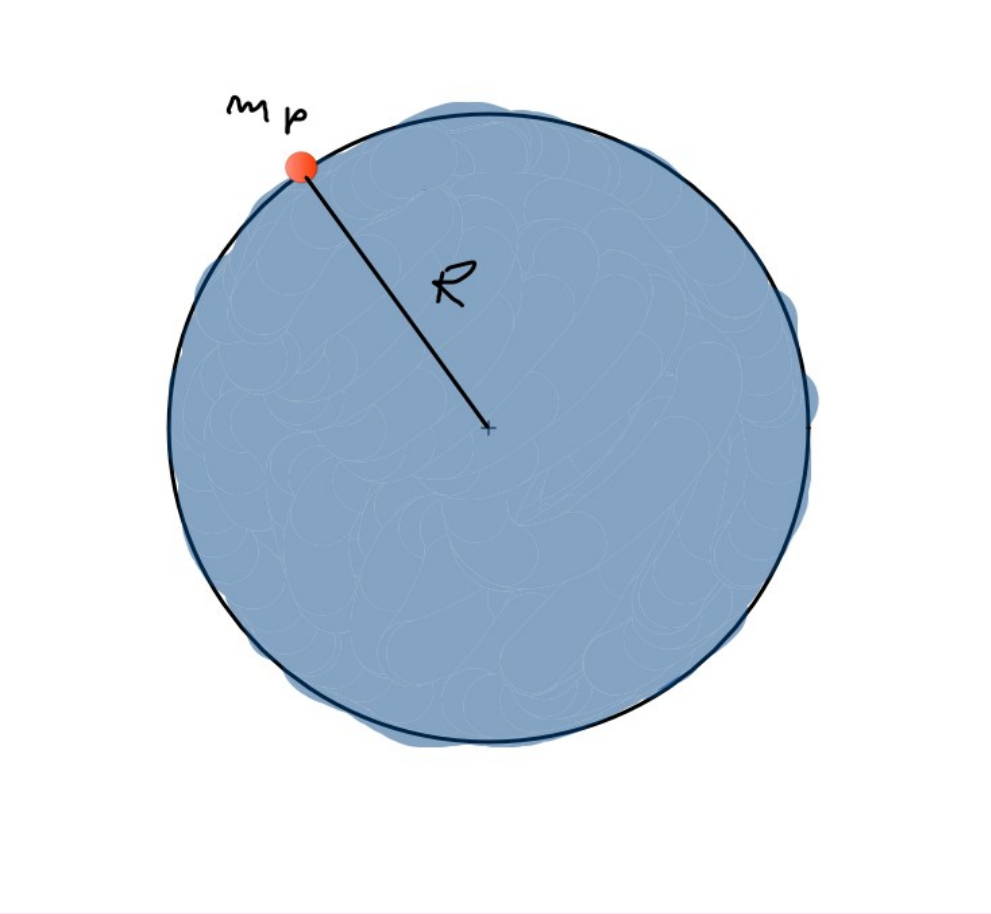
MOTO LIBERO
(m PUÒ ARRIVARE ALL'∞)

Perché cominci la contrazione gravitazionale di una massa gassosa (idrogeno) occorre che le sue particelle siano “legate” (cioè l'energia potenziale gravitazionale cominci a prevalere su quella termica)



$E_{particella} \lesssim 0$

Partiamo da un modello sferico (più facile da analizzare teoricamente per ovvie ragioni di simmetria) …



LIMITE MASSIMO DI ENERGIA PER UN ATOMO DI H CATTURATO: $E = 0$

(1) $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{3}{2} KT - \frac{GMm_p}{r} < 0$

M = MASSA DELL'ADDENSAMENTO DI GAS CHE TRATTIENE L'ATOMO DI IDROGENO

$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ $\qquad r^3 = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{\rho} \Rightarrow r = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{M}{\rho}\right)^{1/3}$

Un po' di calcoli ...

$$\frac{M}{r} = \left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^{1/3} M^{2/3}$$

SOSTITUENDO IN (1)

$$\frac{3}{2} k'T \lesssim G m_p \left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^{1/3} M^{2/3}$$

$$M^{2/3} \gtrsim \frac{3}{2} \frac{kT}{G m_p} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

$$M \gtrsim \left(\frac{3}{2}\frac{K}{G\,m_p}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \rho^{-1/2}\, T^{3/2}$$

MASSA MINIMA IN GRADO DI TENERE LEGATO UN PROTONE

(DIMINUISCE CON IL CRESCERE DELLA DENSITÀ ρ DEL GAS; AUMENTA CON L'AUMENTARE DI T)

Calcoli fatti un po' in fretta. Rifateli con un po' più di calma …

$K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{°K}$ $\qquad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$

$m_p = 1{,}6 \cdot 10^{-27}\ Kg.$

$$M \gtrsim 0{,}7 \cdot 10^{21} \cdot (3°K)^{3/2} \cdot \left(10^6\, m_p\ \frac{Kg}{m^3}\right)^{-1/2} \simeq 10^{32}\ Kg \simeq 100\ M_\odot$$

$(3°K)^{3/2}$: T. DELL'UNIVERSO (RADIAZIONE COSMICA DI FONDO)

$\left(10^6\, m_p\ \frac{Kg}{m^3}\right)^{-1/2}$: DENSITÀ DEL MEZZO INTERSTELLARE (1 PROTONE/cm^3)

Ma il succo del discorso è questo:

nelle condizioni nella materia interstellare il limite minimo di massa per lo sviluppo di una instabilità gravitazionale (con conseguente contrazione) è molto superiore a quello di una singola stella.

Ciò spiega perché ammassi e sistemi multipli siano la regola, non un'eccezione per la popolazione stellare di una galassia.

Ammassi aperti più recenti (di popolazione stellare di disco, formatisi nei bracci a spirale, cioè in condizioni di densità superiore

Ammassi globulari più antichi (di popolazione stellare di alone, formatisi nei bracci a spirale, cioè in condizioni di densità inferiore)

Stabilità di una stella e Viriale

MOMENTO DI INERZIA = GRANDEZZA CHE DEFINISCE L'INERZIA ROTAZIONALE DI UN SISTEMA, CIOÈ LA RESISTENZA CHE OPPONE AD ESSERE MESSO IN ROTAZIONE.

Semplice applicazione del concetto di momento di inerzia

DISCO

ROTANTE

UGUALE ROTAZIONE

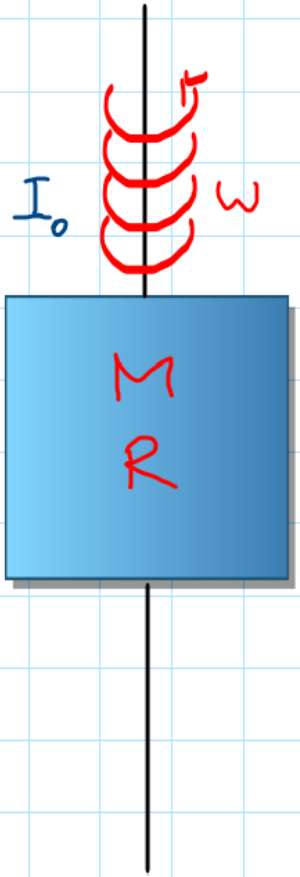
$$L = I\omega$$

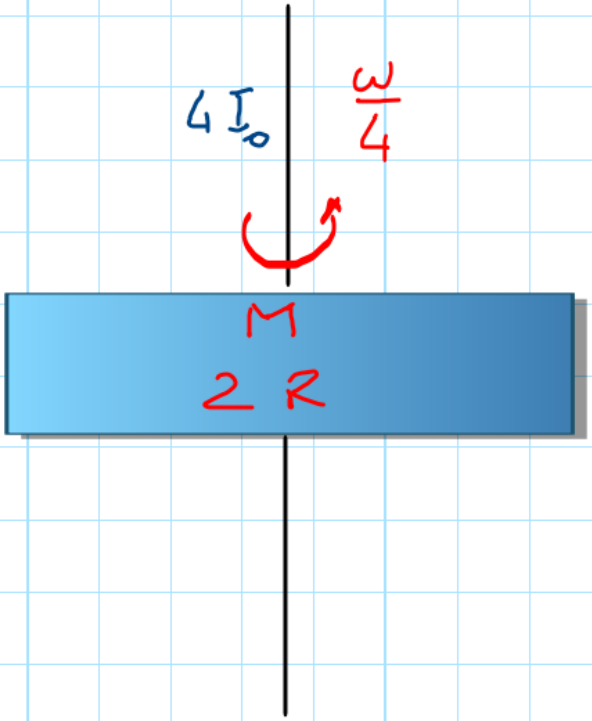
STESSO MOMENTO ANGOLARE

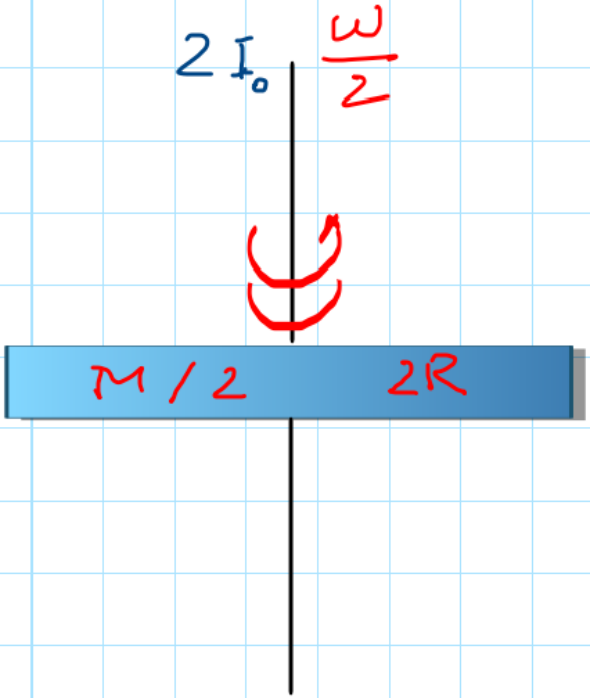
PER UN DISCO ROTANTE INTORNO AL SUO ASSE $I = \frac{1}{2} M R^2$

PER UN DISCO ROTANTE INTORNO AL SUO ASSE

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$







DIPENDE DA:

(1) MASSA m_i

(2) ESTENSIONE, CIOÈ POSIZIONE DELLE SUE COMPONENTI ELEMENTARI (r_i)

CIOÈ DIPENDE DA COM'È DISTRIBUITA LA SUA MASSA DENTRO ALLO SPAZIO CHE OCCUPA.

IN PRATICA

(2) ... PIÙ È MASSICCIO PIÙ FAI FATICA A COMINCIARE A FARLO GIRARE

(6) DI 2 DISCHI DI UGUALE MASSA FACCIO PIÙ FATICA A METTERE IN ROTAZIONE QUELLO CON IL RAGGIO PIÙ GRANDE ...

STABILITÀ DI UN SISTEMA DI PARTICELLE (TEOREMA DEL VIRIALE)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = I$$

(I: MOMENTO DI INERZIA)

m_i: MASSE

r_i: POSIZIONI

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, 2\vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\right]$$

v_i^2 VELOCITA^2

$\vec{a}_i$ ACCELERAZIONI

PER IL II° PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{tot} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

FORZA TOTALE SU m_i

SOMMA DELLE FORZE CHE TUTTI GLI ALTRI CORPUSCOLI ESERCITANO SU m_i

SOSTITUENDO NELLA RELAZIONE PRECEDENTE SI HA

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{r}_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i\right]$$

MA POICHÉ LE FORZE CHE AGISCONO ALL'INTERNO DEL SISTEMA SONO LE ATTRAZIONI GRAVITAZIONALI RECIPROCHE, PER IL III° PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

POSSIAMO SCRIVERE CHE

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\left[\underbrace{2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}mv_i^2}_{\text{ENERGIA CINETICA}} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i>j}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}}_{-\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}}\right]$$

ENERGIA POTENZIALE DEL SISTEMA

E POICHÈ IL SISTEMA STECCARE È STABILE:

ALLORA $\vec{I}$ DEVE RIMANERE COSTANTE ... CIOÈ NON SOLO $\frac{d\vec{I}}{dt} = 0$ MA ANCHE

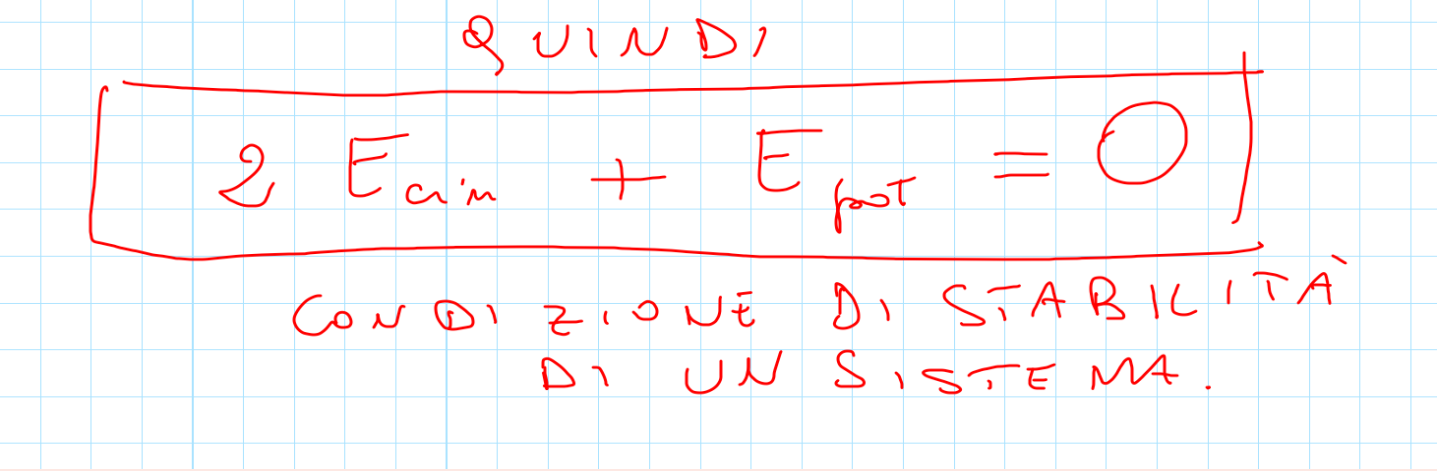
$$\frac{d^2\vec{I}}{dt^2} = 0$$

E POICHÈ IL SISTEMA STECCARE È STABILE:

ALLORA $\vec{I}$ DEVE RIMANERE COSTANTE ... CIOÈ NON SOLO $\frac{d\vec{I}}{dt} = 0$ MA ANCHE

$$\frac{d^2\vec{I}}{dt^2} = 0$$

Condizione di stabilità: la derivata temporale al secondo ordine deve essere nulla. Cioè la distribuzione di massa deve essere continuamente la stessa (le masse devono tenere le stesse posizioni reciproche costanti nel tempo).

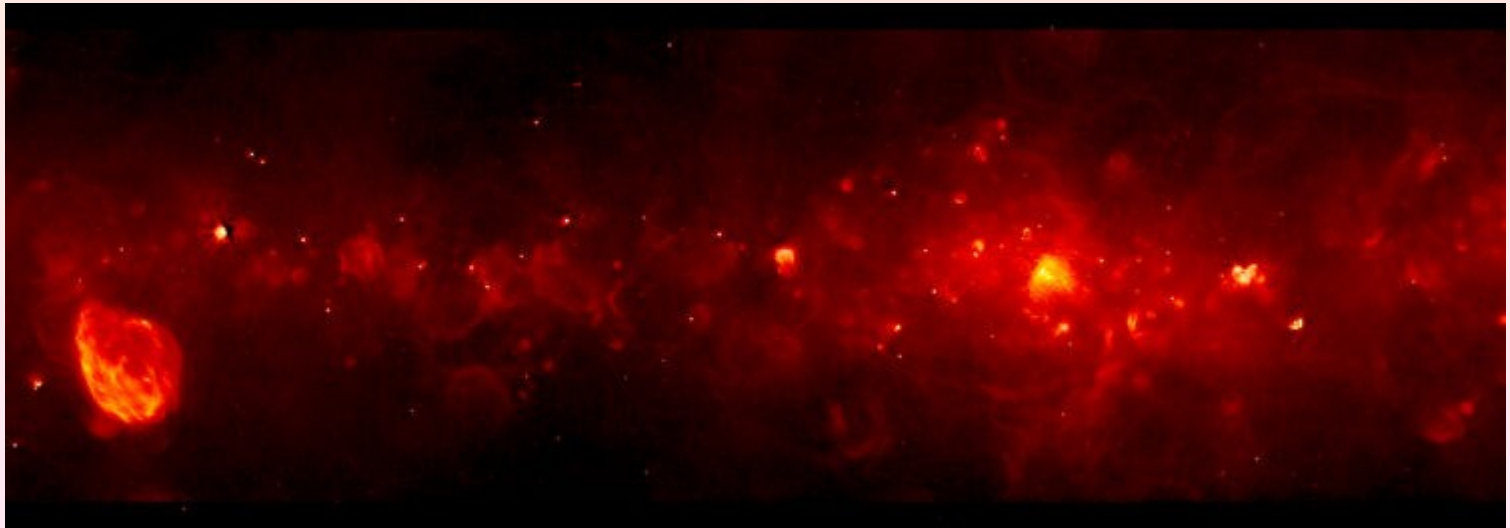


… oppure

$$\mathbf{2T + U = 0}$$

Nella fase protostellare si passa dall'instabilità iniziale $E = T + U \leq 0$ alla condizione di stabilità $2T + U = 0$, cioè $E = T + U = -T$.

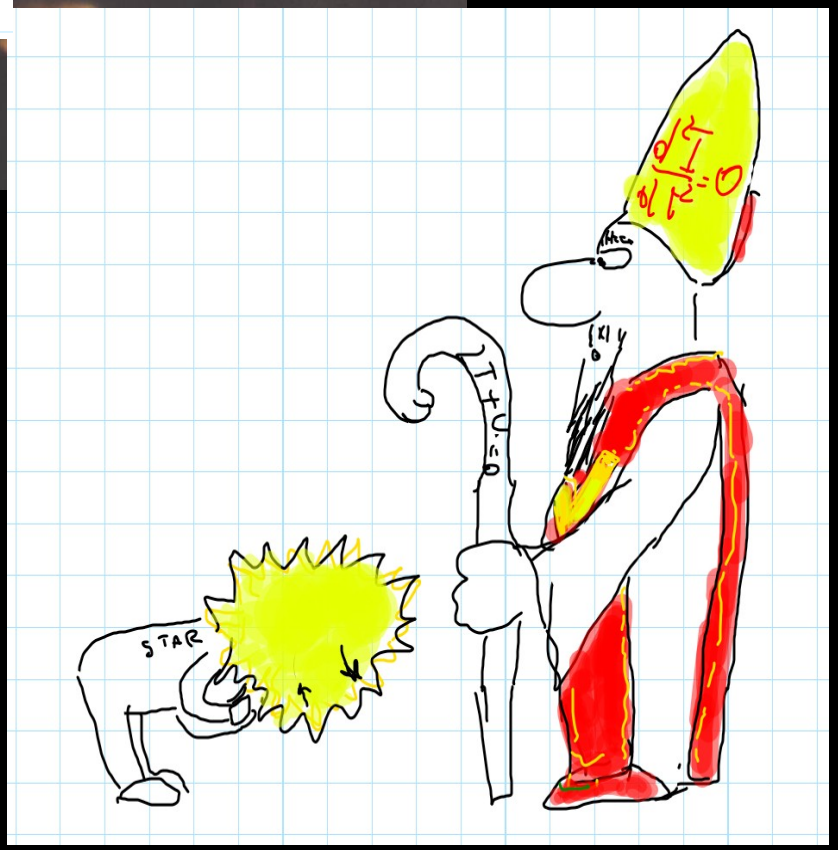
La nube in contrazione dissipa energia per irraggiamento: ciò rende conto delle emissioni infrarosse da parte degli oggetti protostellari.



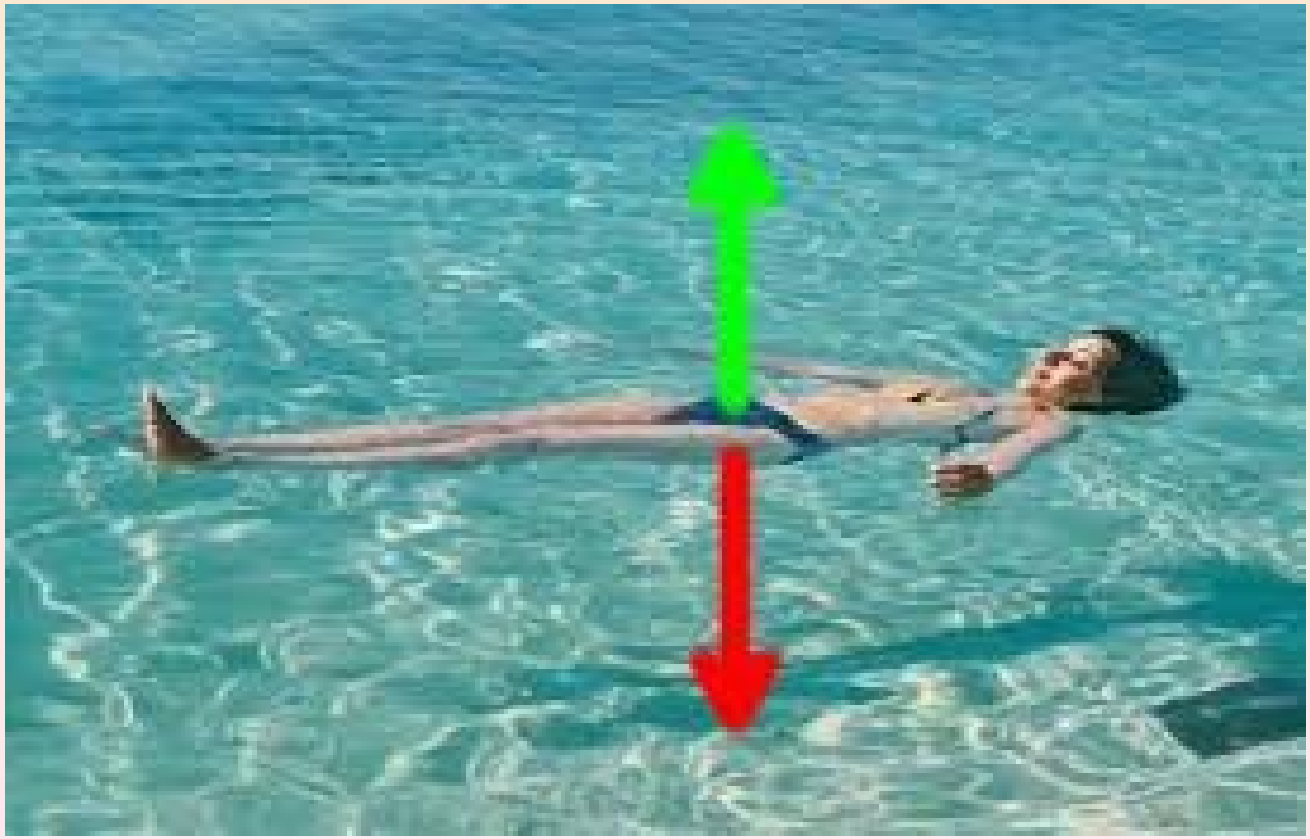
QUANDO UNA STELLA SI È FORMATA ENTRA NEL

"DOMINIO DEL"

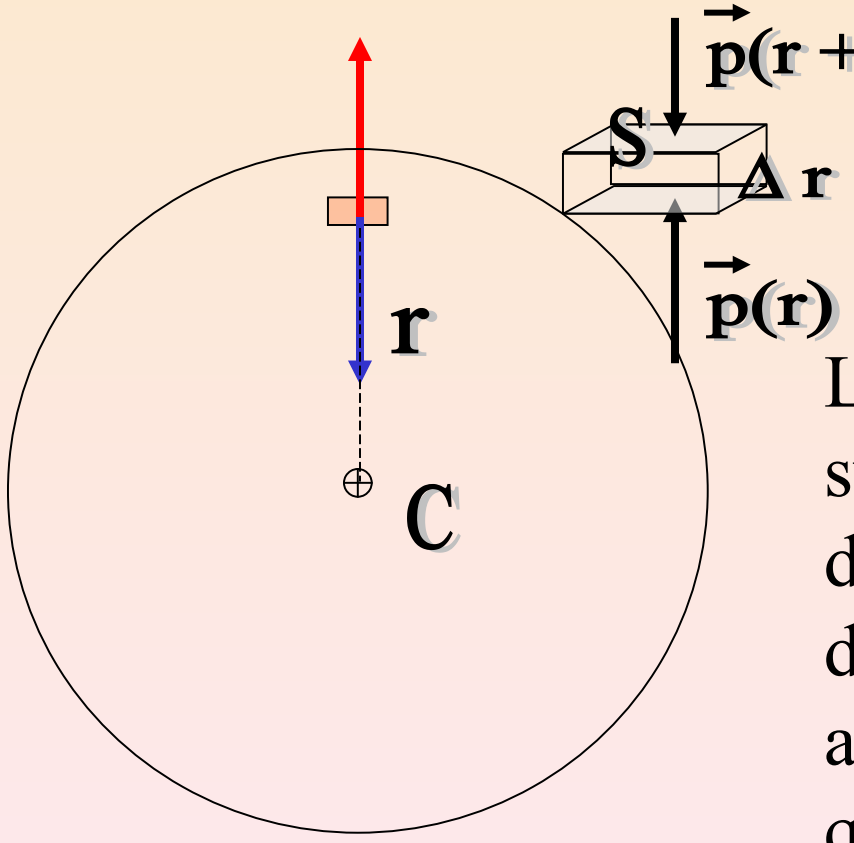
"VIRIALE"



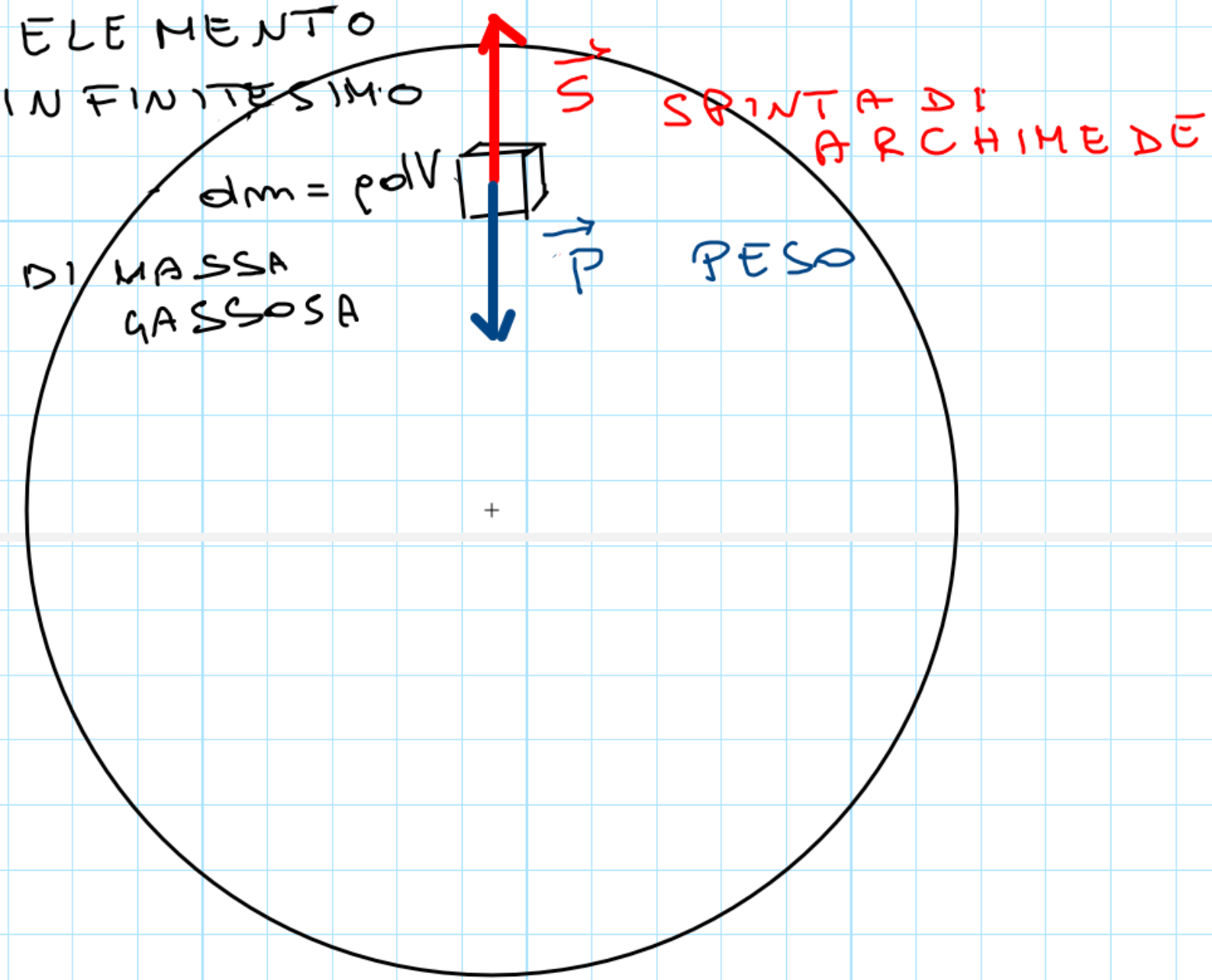
L'equilibrio idrostatico

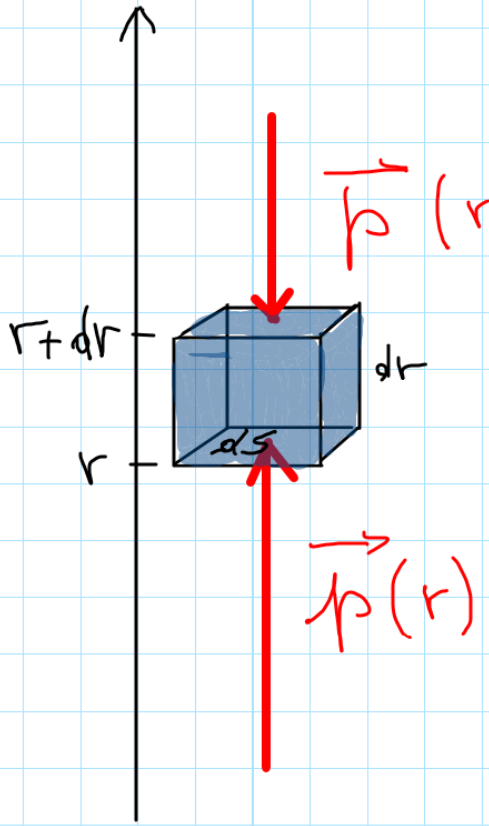


• Equilibrio idrostatico: equilibrio tra la forza peso che agisce su di un elemento di materia gassosa della stella e le forze di pressione che agiscono su di esso



La forza di pressione che agisce su di un elemento di materia è determinata dalla presenza di un dislivello di pressione tra quella agente sulla faccia superiore e quella sulla faccia inferiore (gradiente di pressione).
Vediamo in dettaglio ...


ELEMENTO
INFINITESIMO
$dm = \rho dV$
DI MASSA
GASSOSA
$\vec{S}$
SPINTA DI
ARCHIMEDE
$\vec{P}$
PESO



$$F_p = \frac{G M_r \overbrace{\rho\, dV}^{dm}}{r^2}$$

PESO DELL'ELEMENTO DI MASSA dm

$$S_A = \left[\vec{p}(r) - \vec{p}(r+dr)\right] dS$$

SQUILIBRIO DI PRESSIONE $\times$ AREA DI BASE DELL'ELEMENTO

$$dV = dr \cdot dS$$

VOLUME = ALTEZZA × BASE

$$\sum_A \vec{F} + \vec{F}_p = 0$$

$$\left[-p(r+dr) + p(r) \right] \cancel{dS} - G \frac{M_r \rho \, dr \, \cancel{dS}}{r^2} = 0$$

$$-\left[\frac{p(r+dr)-p(r)}{dr}\right] = \frac{G M_r \rho}{r^2}$$

DERIVATA DELLA PRESSIONE RISPETTO ALLA DISTANZA DAL CENTRO

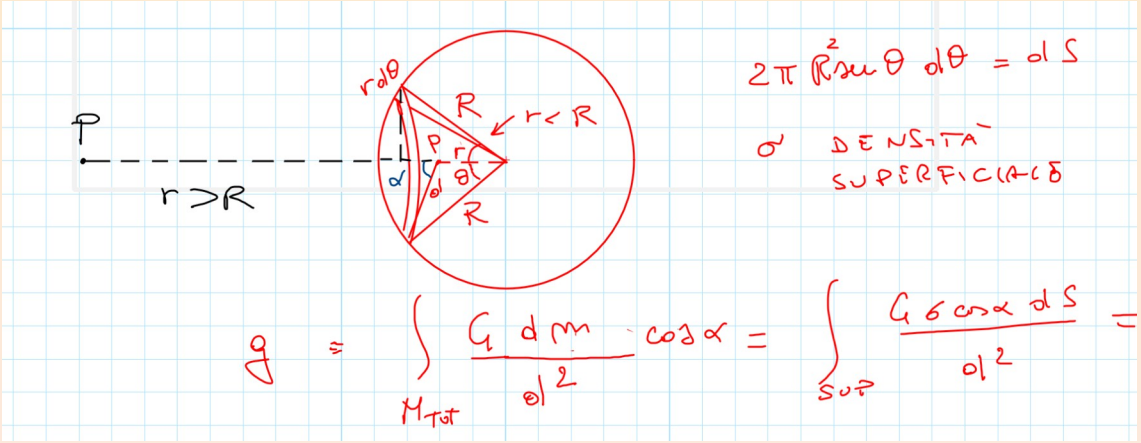
$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{G M_r \rho}{r^2}}$$

EQUAZIONE DELL'EQUILIBRIO IDROSTATICO.

DOVE M_r È LA MASSA CONTENUTA ALL'INTERNO DELL'ELEMENTO DI GAS (QUELLA ESTERNA NON PRODUCE CAMPO GRAVITAZIONALE)

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho(x)\, x^2\, dx$$

Memento: Campo gravitazionale generato da uno strato sferico di spessore infinitesimo



$r < R$

$$2\pi G \sigma R \frac{d}{dr}\left(1 + \frac{R}{r} - \frac{R}{r} + 1\right)$$

$$g = 2\pi G \sigma R \frac{d}{dr}(2) = 0$$

CAMPO NULLO ALL'INTERNO

$r > R$

$$2\pi G \sigma R \frac{d}{dr}\left(1 + \frac{R}{r} - 1 + \frac{R}{r}\right) =$$

$$g = 2\pi G \sigma R \cdot \left(-\frac{2R}{r^2}\right) =$$

$$\boxed{g = -\frac{G\left[4\pi R^2 \sigma\right]}{r^2} = -\frac{GM}{r^2}}$$

ALL'ESTERNO È UGUALE A QUELLO DI UNA MASSA PUNTIFORME NEL CENTRO.

Equazione di continuità della massa
(chi ha mangiato i dolci che mancano?)

Non dobbiamo dimenticare che le stelle sono fatte di materia e che quest'ultima non si crea né si distrugge.

Vale a dire che se aumenta (o diminuisce) di un po' la sua quantità in un certo volume finito, è perché quel po' in più (o in meno) è entrato (o uscito) dalla superficie che lo racchiude.

E poiché ogni principio fisico deve avere la sua legge matematica ...

Proviamo a spiegare con un esempio pratico …

ORE 8 : $N_0 = 10$ GIANDUIOTTI

ORE 20 : $N_1 = 4$ "

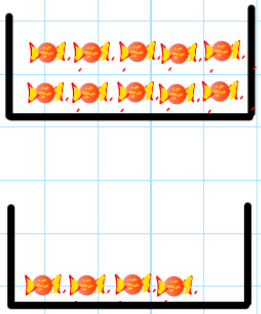
VARIAZIONE DI INTERVALLO DI TEMPO

$\Delta N = 4 - 10 = -6$

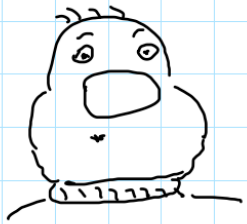
$\Delta t = 20 - 8 = 12\ h$

VARIAZIONE DI QUANTITÀ NELL'UNITÀ DI TEMPO (ORA)

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{-6}{12} = -0{,}5 \left(\frac{\text{GIANDUJ}}{\text{h}}\right)$$

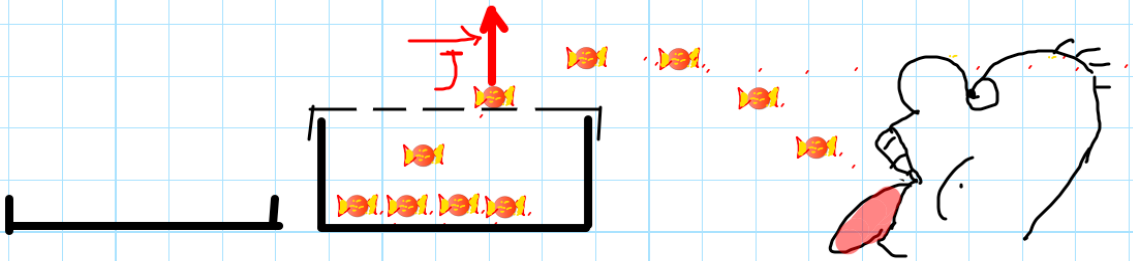


SE CE N'È DI MENO QUALCUNO LI AVRÀ TRAFUGATI!

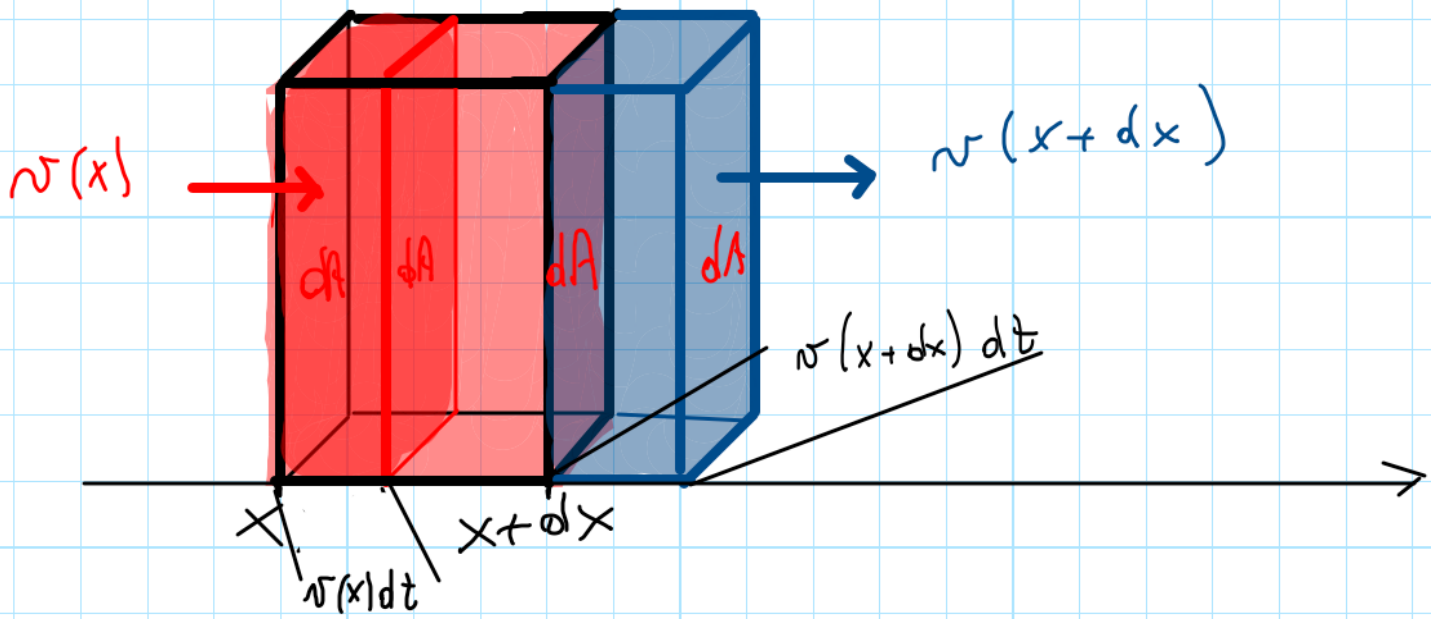


$(\vec{J})$ FLUSSO TRASVERSALE USCENTE (< 0)

CHE ATTRAVERSA L'INVOLUCRO (SUPERFICIE CHIUSA)



... IDEALMENTE CHIUSA!



$\rho(x)\, dA\, v(x)\, dt$

QUANTITÀ DI MATERIA CHE ENTRA NEL TEMPO dt

$\rho(x+dx)\cdot v(x+dx)\, dA\, dt$

QUANTITÀ DI MATERIA CHE ESCE NEL TEMPO dt

$$dM = \rho(x)\, dA\, v(x)\, dt - \rho(x+dx)\, dA\, v(x+dx)\, dt$$

$$\frac{dM}{dt} = -\left[\rho(x+dx)\, v(x+dx) - \rho(x)\, v(x)\right] dA \quad dx$$

$$\frac{1}{dA\, dx}\frac{dM}{dt} = -\frac{d(\rho v)}{dx}$$

$dA\, dx = dV$ (VOLUMETTO INFINITESIMO)

$$\frac{dM}{dV} = \rho \quad \text{(DENSITÀ)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}}$$

(EQUAZIONE DI CONTINUITÀ IN 1 DIMENSIONE)

Equazione di continuità = equazione di conservazione della materia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}$$

(EQUAZIONE DI CONTINUITÀ IN 3d)

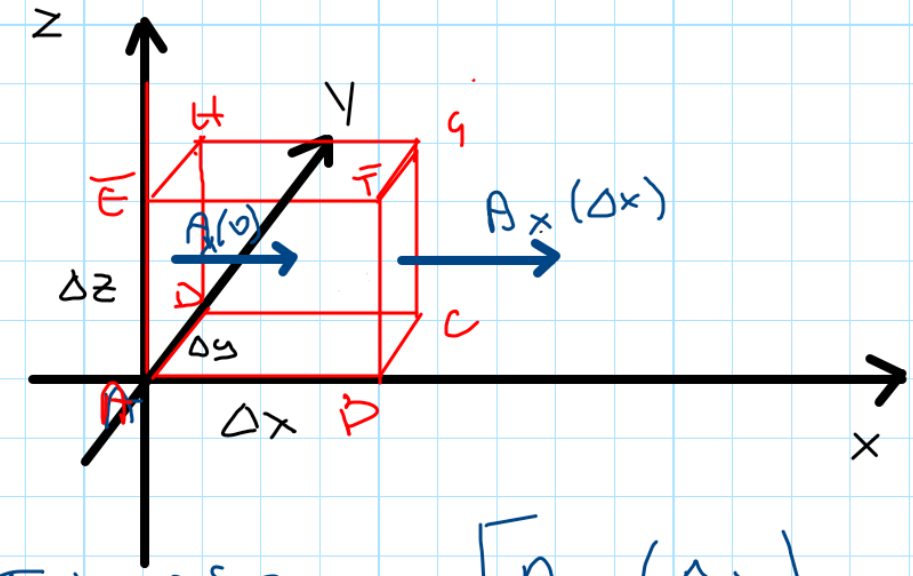
$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = \mathrm{div}\,(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}$$

NOTA

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(CHIAMATO OPERATORE "DIVERGENZA")

Operatore differenziale “divergenza” (flusso attraverso una superficie chiusa)



FLUSSO TOTALE ATTRAVERSO LA SUPERFICIE CHIUSA $= \left[A_x(\Delta x) - A_x(0)\right]\Delta y\,\Delta z +$

$+ \left[A_y(\Delta y) - A_y(0)\right]\Delta x\,\Delta z +$

$+ \left[A_z(\Delta z) - A_z(0)\right]\Delta x\,\Delta y =$

$$= \left(\frac{\Delta A_x}{\Delta x} + \frac{\Delta A_y}{\Delta y} + \frac{\Delta A_z}{\Delta z} \right) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \qquad \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$$

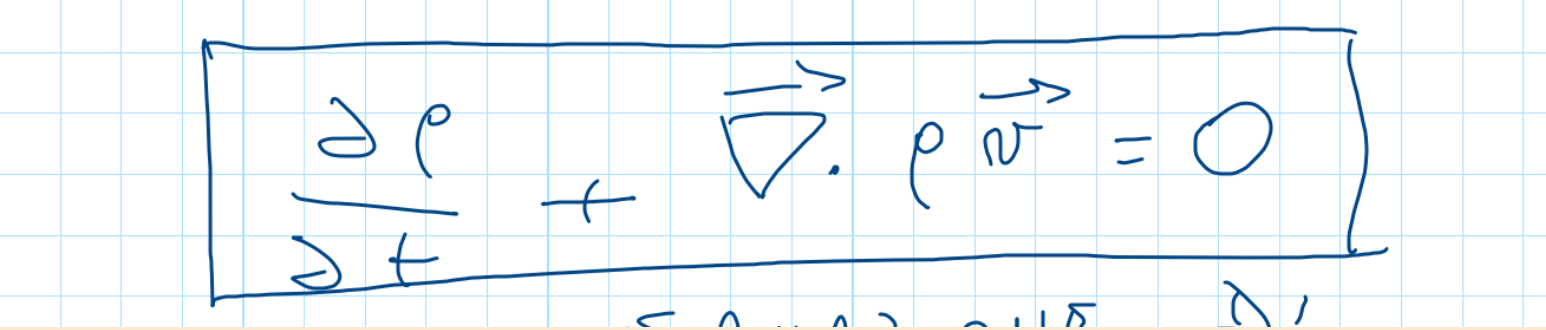
IN FORMA DIFFERENZIALE

$$\int_{\text{SUPERFICIE ABCDEFGH}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{VOLUME}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV$$

$\downarrow$

DIVERGENZA

(OPERATORE DIFFERENZIALE DI "FLUSSO")



In pratica vuol dire che il cambiamento di densità all'interno di un dato volume, è legato al flusso entrante di materia entrante o uscente ($\rho \mathbf{v}$, prodotto della densità per la velocità di flusso).

Per oggi basta così valà ...